2015년 1차 2교시 전공A

6. 질량이 m인 단원자 분자 이상기체의 속력 v에 대한 규격화된 맥스웰 분포함수는

$$D(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

이다. 이 기체 분자의 평균 속력을 구하는 적분식을 쓰고, 그 값을 구하시오. (단, 필요하면 $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$을 활용하시오.)

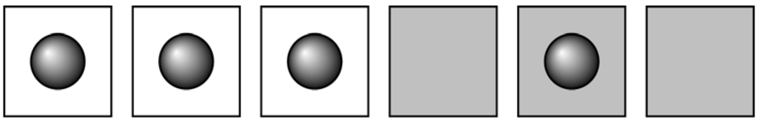
[2점]

(답) 적분식 : $\bar{v} = \int_0^\infty v D(v) dv = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$

평균속력 : $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

※ $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, $\tilde{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

3. 그림과 같이 흰 상자 3개와 검은 상자 3개가 있고 상자에 들어갈 수 있는 입자가 4개 있다. 각 상자에는 입자가 하나씩만 들어갈 수 있고, 모든 입자는 반드시 상자에 들어가야 한다. 입자가 흰 상자에 들어가면 J의 에너지를 갖고, 검은 상자에 들어가면 $2J$의 에너지를 갖는다. 각 상자는 구별되지만, 입자는 구별되지 않는다.



계가 가질 수 있는 에너지 값을 모두 쓰고, 에너지 값 각각에 대해 미시상태의 겹침 수(축퇴도)를 쓰시오. 또한 계의 엔트로피가 가장 클 때의 에너지 값을 쓰고, 그 값에서 엔트로피가 가장 큰 이유를 설명하시오. [5점]

(답)

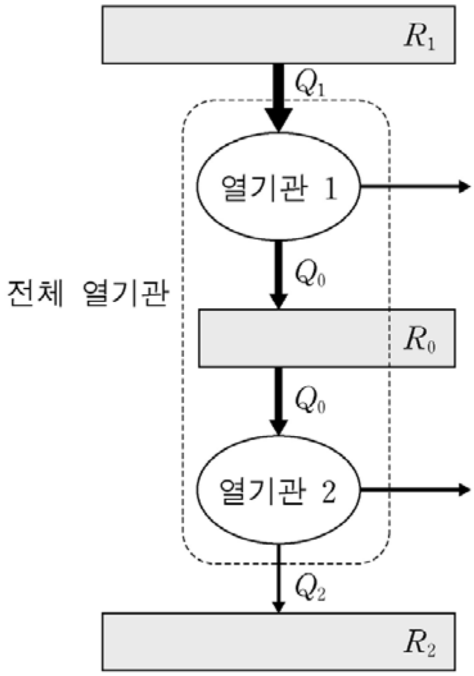
○			○	○	○	미시상태수 : 3 $E = 7J$
○	○		○	○		미시상태수 : 3×3=9 $E = 6J$
○	○	○	○			미시상태수 : 3 $E = 5J$

계의 엔트로피가 가장 클 때의 에너지 값 : $E = 6J$

이유 : 상태의 수가 가장 많으므로, $S = k\ln\Omega = k\ln 9$

2014년 2교시 전공A

10. 그림은 열효율이 각각 η_1, η_2인 열기관 1, 2가 결합되어 있는 전체 열기관을 나타낸 것이다. 열기관 1은 열원 R_1에서 열 Q_1을 흡수하여 열원 R_0에 열 Q_0을 배출하고 $(Q_1 - Q_0)$의 일을 한다. 열기관 2는 R_0에서 Q_0을 흡수하여 열원 R_2에 열 Q_2를 배출하고 $(Q_0 - Q_2)$의 일을 한다.



전체 열기관의 열효율을 η_1과 η_2로 나타내시오. [2점]

(풀이)

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{Q_0}{Q_1},\ \eta_2 = \frac{W_2}{Q_0} = \frac{Q_0 - Q_2}{Q_0}$$

전체 열기관의 열효율

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1} + \left(\frac{W_2}{Q_0}\right)\left(\frac{Q_0}{Q_1}\right) = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1) = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$$

5. 상태방정식이 $(P+a)(v-b)=RT$로 주어지는 1mol의 기체가 있다. P, v, T는 각각 압력, 부피, 온도이고 R는 기체상수이며 a, b는 양의 상수이다. 엔트로피의 변화는 다음 방정식을 만족한다.

$$Tds = c_v dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv$$

여기서 s, c_v는 각각 1 mol에 대한 엔트로피와 정적비열이다.
이 기체가 온도 T_0에서 가역 등온과정을 통해 부피가 v_1에서 v_2로 변했을 때, 기체가 한 일을 구하고, 이때 기체의 엔트로피 변화를 위 식을 사용하여 풀이 과정과 함께 구하시오. [4점]
(풀이)
기체가 한 일

$$P = \frac{RT}{v-b} - a$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} P dv = \int_{v_1}^{v_2}\left(\frac{RT_0}{v-b} - a\right)dv = RT_0 \ln\left(\frac{v_2-b}{v_1-b}\right) - a(v_2 - v_1)$$

엔트로피의 변화
등온과정이므로

$Tds = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv$, 그리고 $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b}$ 이므로

$$\Delta s = \int_{v_1}^{v_2} \frac{R}{v-b} dv = R\ln\left(\frac{v_2-b}{v_1-b}\right)$$

2013년1차 열역학

30. 어떤 페르미온이 해밀토니안의 3가지 고유상태를 가지며, 세고유상태의 에너지는 각각 $0, \epsilon, 2\epsilon$이다. 이러한 동일한 페르미온2개로 이루어진 계의 분배함수는? (단, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B는 볼츠만상수이며 페르미온 간의 상호작용을 무시하고, 고유상태는 스핀과 공간 성분만을 고려한 것이다.)

(답) $e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} + e^{-3\beta\epsilon}$

[solution]

configuration			no. of states		
0	ϵ	2ϵ	MB	BE	FD
××			1	1	--
	××		1	1	--
		××	1	1	--
×	×		2	1	1
×		×	2	1	1
	×	×	2	1	1

(a) $Z_{\mathrm{MB}} = 1 + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-4\epsilon\beta} + 2e^{-\epsilon\beta} + 2e^{-2\epsilon\beta} + 2e^{-3\epsilon\beta}$

(b) $Z_{\mathrm{BE}} = 1 + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-4\epsilon\beta} + e^{-\epsilon\beta} + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-3\epsilon\beta}$

(c) $Z_{\mathrm{FD}} = e^{-\epsilon\beta} + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-3\epsilon\beta}$

통계문제의 공식화

$$Z \equiv \sum_r e^{-\beta E_r}$$

$$\overline{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \qquad (6.5.4)$$

$$\overline{(\Delta E)^2} = -\frac{\partial \overline{E}}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \qquad (6.5.8)$$

$$\overline{p} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln Z \qquad (6.5.12)$$

$$S \equiv k(\ln Z + \beta \overline{E}) \qquad (6.6.5)$$

동일 입자 기체 ; N, V, T

r (or s) ; 단일 입자의 가능한 양자상태

ϵ_r ; r상태에 있는 입자의 에너지

n_r ; r상태에 있는 입자의 수

R ; 전체 기체의 가능한 양자 상태

입자들 사이에 무시할 수 있는 상호작용을 가정한다면 R상태의 총에너지는

$$E_R = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + n_3\epsilon_3 + \cdots\cdots = \sum_r n_r\epsilon_r$$

$$\sum_r n_r = N$$

분배함수 ; 다양한, 모든 가능한 수치들 $n_1, n_2, n_3,$을 포함

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)} \qquad (9.2.3)$$

상태 s의 평균 입자수

$$\overline{n}_s = \frac{\sum_R n_s e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}$$

$$\overline{n}_s = \frac{1}{Z}\sum_R\left(-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\right)e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)} = -\frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial\epsilon_s}$$

or $$\overline{n}_s = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial\epsilon_s} \qquad (9.2.5)$$

☞ 주어진 단일 입자 상태 s에 있는 평균 입자수는 분배함수로 표현된다.

분산의 계산

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \overline{(n_s - \overline{n}_s)^2} = \overline{n_s^2} - \overline{n}_s^2 \qquad (9.2.6)$$

$\overline{n_s^2}$은 정의에 의해

$$\overline{n_s^2} = \frac{\sum_R n_s^2 e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}$$

따라서 $$\overline{n_s^2} = \frac{1}{Z}\sum\left(-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\right)e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\right)^2 Z$$

or $$\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2 Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\epsilon_s^2}$$

(9.2.5)를 포함시켜 더 편리한 형태로 표현하면

$$\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\epsilon_s}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\epsilon_s}\right)^2\right] = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial\epsilon_s}\right) + \beta^2\overline{n}_s^2\right]$$

따라서 (9.2.6)은

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial\epsilon_s^2} \qquad (9.2.9)$$

or $$\overline{(\Delta n_s)^2} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\overline{n}_s}{\partial\epsilon_s} \qquad (9.2.10)$$

☞ 따라서 흥미 있는 모든 물리량의 계산은 단순히 분배함수 (9.2.3)을 구하면 된다.

Maxwell-Boltzmann 통계

각 상태에 있는 가능한 모든 입자들의 수를 더한다.

$n_r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 각각의 r에 대해

$$\sum_r n_r = N \qquad (9.2.12)$$

☞ 입자는 구별가능

☞ $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$는 변하지 않더라도 다른 상태에 있는 두 입자가 서로 교환할 때는 구분되는 상태

Bose-Einstein과 광자(photon) 통계

☞ 입자는 구별 불가능

☞ 수치 $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$의 단순한 명시로서 기체의 상태를 명시하는 데 충분

$n_r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 각각의 r에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

Fermi-Dirac 통계

☞ 입자는 구별 불가능

☞ 수치 $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$의 단순한 명시로서 기체의 상태를 명시하는 데 충분

☞ 각 상태에 한 개 이상의 입자는 존재할 수 없다.

$n_r = 0, 1$ 각각의 r에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

9.3 양자 분포함수

이상기체에 대한 양자론의 본질적 특성

특정상태 s내의 평균 입자수

$$\overline{n}_s = \frac{\sum_{n_1, n_2, \cdots} n_s e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots + n_s\epsilon_s + \cdots)}}{\sum_{n_1, n_2, \cdots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots + n_s\epsilon_s + \cdots)}} \qquad (9.3.1)$$

$$\overline{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s\epsilon_s} \sum^{(s)}_{n_1, n_2, \cdots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s} \sum^{(s)}_{n_1, n_2, \cdots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}} \qquad (9.3.2)$$

광자 통계

총 입자수를 명기하지 않은 BE 통계

분자 분모의 $\sum^{(s)}$는 똑 같으므로 상쇄되어

$$\overline{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s\epsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s}} \qquad (9.3.3)$$

$$\overline{n_s} = \frac{(-1/\beta)(\partial/\partial\epsilon_s)\sum e^{-\beta n_s\epsilon_s}}{\sum e^{-\beta n_s\epsilon_s}} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\ln\left(\sum e^{-\beta n_s\epsilon_s}\right) \qquad (9.3.4)$$

그런데 $\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \epsilon_s} = 1 + e^{-\beta\epsilon_s} + e^{-2\beta\epsilon_s} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_s}}$

따라서 $\overline{n_s} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\ln(1-e^{-\beta\epsilon_s}) = \frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{1-e^{-\beta\epsilon_s}}$

or $\overline{n}_s = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_s}-1}$ (9.3.5)

Fermi-Dirac 통계

총 입자수 N

$n_r = 0, 1$ 각각의 r에 대해

$\sum_r n_r = N$

s상태를 제외한 모든 상태에 대해 sum

$$Z_s(N) \equiv \sum_{n_1, n_2, \cdots}^{(s)} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}$$

N개의 입자가 이 상태에 존재한다면

$\sum_r^{(s)} n_r = N$ (s상태는 이 sum에서 제외)

$n_s = 0$ 와 1에 대해 합하면

$$\overline{n}_s = \frac{0 + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1)}{Z_s(N) + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1)}$$

or $\overline{n}_s = \frac{1}{[Z_s(N)/Z_s(N-1)]e^{\beta\epsilon_s}+1}$

$Z_s(N-1)$을 $Z_s(N)$에 연관시켜 간단히 할 수 있다. $\Delta N \ll N$이면

$$\ln Z_s(N-\Delta N) = \ln Z_s(N) - \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N}\Delta N = \ln Z_s(N) - \alpha_s \Delta N$$

or $Z_s(N-\Delta N) = Z_s(N) e^{-\alpha_s \Delta N}$ (9.3.10)

여기서 $\alpha_s \equiv \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N}$ (9.3.11)

α_s가 s에 무관하다면

$\alpha_s = \alpha$ (9.3.12)

$\alpha = \frac{\partial \ln Z}{\partial N}$ (9.3.13)

(9.3.10)에서 $\Delta N = 1$ 이면

$\overline{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon_s}+1}$ (9.3.14)

☞ Fermi-Dirac 분포

1. α의 결정

$\sum_r \overline{n}_r = N$

or $\sum_r \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_r}+1} = N$

since the free energy $F = -kT\ln Z$, 와 (9.3.13)

$$\alpha = -\frac{1}{kT}\frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\mu}{kT} = -\beta\mu$$

★ μ : 입자당 화학퍼텐셜(chemical potential)

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} + 1} \qquad (9.3.18)$$

★ $\epsilon_s \gg 1$ then $\bar{n}_s \to 0$

★ $0 \le \bar{n}_s \le 1$; 파울리의 배타율

근사의 타당성에 대한 유의

$$Z(N) = Z_s(N) + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1) = Z_s(N)(1 + e^{-\alpha - \beta\epsilon_s})$$

or $\quad \ln Z = \ln Z_s + \ln(1 + e^{-\alpha - \beta\epsilon_s})$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial N} = \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} - \frac{e^{-\alpha-\beta\epsilon_s}}{1 + e^{-\alpha-\beta\epsilon_s}}\frac{\partial\alpha}{\partial N}$$

or $\quad \alpha = \alpha_s - \bar{n}_s \dfrac{\partial \alpha}{\partial N}$

☞ if $\dfrac{\partial\alpha}{\partial N}\bar{n}_s \ll \alpha$ then $\alpha_s = \alpha$

Bose-Einstein 통계

$n_r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 각각의 r에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \cdots}^{(s)} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \cdots}^{(s)} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}} \qquad (9.3.2)$$

$$\bar{n}_s = \frac{0 + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1) + 2e^{-2\beta\epsilon_s} Z_s(N-2) + \cdots}{Z_s(N) + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1) + e^{-2\beta\epsilon_s} Z_s(N-2) + \cdots} \qquad (9.3.20)$$

★ $Z_s(N - \Delta N) = Z_s(N) e^{-\alpha_s \Delta N}$ (9.3.10)

★ $\alpha_s \equiv \dfrac{\partial \ln Z_s}{\partial N}$ (9.3.11)

★ α_s가 s에 무관; $\alpha_s = \alpha$ (9.3.12)

$$\bar{n}_s = \frac{Z_s(N)[0 + e^{-\beta\epsilon_s} e^{-\alpha} + 2e^{-2\beta\epsilon_s} e^{-2\alpha} + \cdots]}{Z_s(N)[1 + e^{-\beta\epsilon_s} e^{-\alpha} + e^{-2\beta\epsilon_s} e^{-2\alpha} + \cdots]}$$

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_s n_s e^{-n_s(\alpha + \beta\epsilon_s)}}{\sum e^{-n_s(\alpha + \beta\epsilon_s)}} \qquad (9.3.21)$$

(9.3.4)의 계산과 동일한 과정에 의해

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon_s} - 1} \qquad (9.3.22)$$

☞ Bose-Einstein 분포

2. 매개변수 α의 결정

$$\sum_r \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_s}-1} = N$$

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s-\mu)}-1} \tag{9.3.24}$$

★ $\alpha = -\beta\mu$

★ 광자; $\alpha = 0$ → Planck 분포

9.4 Maxwell-Boltzmann 통계

Maxwell-Boltzmann 통계의 엄격한 고전 경우

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots)}$$

☞ 모든 상태 R에 대해 summation

☞ 입자들은 구별가능 ; $\{n_1, n_2, \cdots\}$의 가능한 배열 방법의 수

★ $\dfrac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots}$

$$Z = \sum_{n_1,n_2,\cdots} \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots)}$$

$$Z = \sum_{n_1,n_2,\cdots} \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots} (e^{-\beta\epsilon_1})^{n_1}(e^{-\beta\epsilon_2})^{n_2}\cdots$$

☞ 다항식의 전개 결과

$$Z = (e^{-\beta\epsilon_1}+e^{-\beta\epsilon_2}+\cdots)^N$$

▶ $$\ln Z = N\ln\left(\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}\right) \tag{9.4.4}$$

따라서

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta}N\frac{-\beta e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$$

▶ $$\bar{n}_s = N\frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}} \tag{9.4.7}$$

☞ Maxwell-Boltzmann 분포

분산의 계산

$$\overline{(\Delta n_s^2)} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \bar{n}_s}{\partial \epsilon_s} = -\frac{N}{\beta}\left[\frac{-\beta e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum e^{-\beta\epsilon_r}} - \frac{-\beta e^{-\beta\epsilon_s}e^{-\beta\epsilon_s}}{(\sum e^{-\beta\epsilon_r})^2}\right] \tag{9.4.8}$$

$$= \bar{n}_s\left(1-\frac{\bar{n}_s}{N}\right) \approx \bar{n}_s$$

★ 마지막 단계는 $\bar{n}_s \ll N$ 이므로

상대분포는

▶ $$\frac{\overline{(\Delta n_s)^2}}{\bar{n}_s^2} = \frac{1}{\bar{n}_s} \tag{9.4.9}$$

9.5 광자 통계

분배함수

$$Z=\sum_{R} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots)}$$

☞ $n_r=0,\,1,\,2,\,\cdots$, 그 외 제한사항 없음

$$Z=\sum_{n_1,\,n_2,\,\cdots} e^{-\beta n_1\epsilon_1}e^{-\beta n_2\epsilon_2}e^{-\beta n_3\epsilon_3}\cdots$$

$$Z=\left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1\epsilon_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2\epsilon_2}\right)\left(\sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-\beta n_3\epsilon_3}\right)\cdots$$

위 식은 간단히 더해지고 $\overline{n}_s$는

$$Z=\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_1}}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_2}}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_3}}\right)\cdots$$

$$\ln Z=-\sum_{r}\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_r}\right)$$

$$\overline{n}_s=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial\epsilon_s}=\frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{1-e^{-\beta\epsilon_s}}$$

▶ $\overline{n}_s=\dfrac{1}{e^{\beta\epsilon_s}-1}$; Planck 분포

분산의 계산

$$\overline{(\Delta n_s)^2}=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\overline{n}_s}{\partial\epsilon_s}=\frac{e^{\beta\epsilon_s}}{(e^{\beta\epsilon_s}-1)^2}$$

$$\overline{(\Delta n_s)^2}=\frac{(e^{\beta\epsilon_s}-1)+1}{(e^{\beta\epsilon_s}-1)^2}=\overline{n}_s+\overline{n}_s^2$$

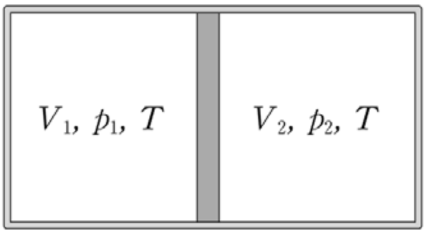
hence $\overline{(\Delta n_s)^2}=\overline{n}_s(1+\overline{n}_s)$

▶ $\dfrac{\overline{(\Delta n_s)^2}}{\overline{n}_s^2}=\dfrac{1}{\overline{n}_s}+1$; 상대분산도

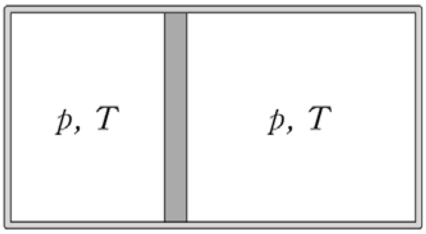
☞ 분산이 MB 경우보다 크다.

☞ $\overline{n}_s\gg 1$ 이라도 상대분산은 임의적으로 작지 않다.

31. 그림 (가)는 직육면체 상자를 좌우로 분리하는 피스톤이 고정되어 있고 양쪽에 이상기체가 채워져 있는 것을 나타낸 것이다. 왼쪽 부분의 부피와 압력은 각각 V_1, p_1이고 오른쪽 부분은 V_2, p_2이다. 그림 (나)는 (가)의 피스톤이 마찰 없이 좌우로 자유롭게 이동할 수 있게 되어 평형을 이룬 상태를 나타낸 것이며, 이때 압력은 p이다. (가), (나)에서 기체의 온도는 T로 일정하게 유지된다. 압력 p는?



(가)



(나)

(답) $\dfrac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$

[풀이]

(가)의 각각에 대해

$$p_1 V_1 = n_1 RT \quad \text{and} \quad p_2 V_2 = n_2 RT$$

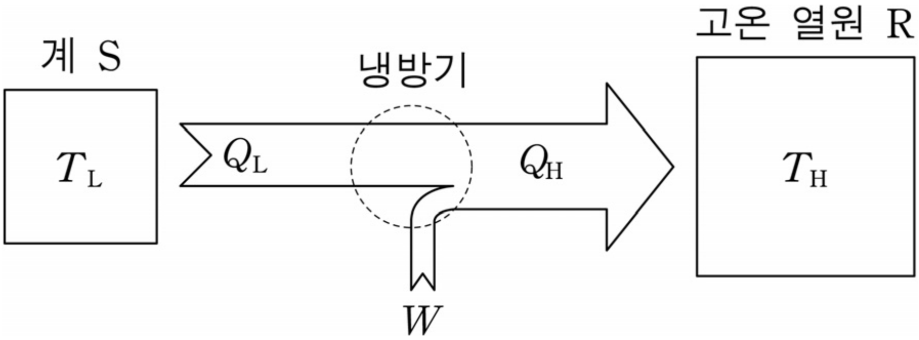
(나)에 대해

$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2)RT$$

이것을 p에 대해서 정리하면

$$p = \frac{n_1 RT + n_2 RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

32. 그림은 온도가 T_L인 계 S와 온도가 T_H인 고온 열원(heat reservoir) R 사이에서 카르노 순환과정에 따라 작동하는 냉방기에 의하여, 순환과정의 주기 τ동안 S에서 열 Q_L이 제거되고 R로 열 Q_H가 방출되는 것을 모식적으로 나타낸 것이다. W는 냉방기에 연결된 전기가 τ동안 냉방기에 해 주는 일이다. τ동안 S에 열 $k(T_H - T_L)$이 유입되지만 냉방기가 제거하는 Q_L과 상쇄되어 S의 온도 T_L은 일정하게 유지된다.



엔트로피는 카르노 순환과정의 엔트로피 변화만을 고려할 때, W는? (단, k는 양의 상수이고, $T_L < T_H$이며, 고온 열원은 충분히 커서 T_H의 변화를 무시한다.) [2.5점]

(답) $k\dfrac{(T_H - T_L)^2}{T_L}$

[풀이]

$$Q_H = Q_L + W \qquad (1)$$

Carnot 순환과정에서 열의 전달은 온도T에 비례하므로

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_L}{T_L} \qquad (2)$$

$$Q_L = k(T_H - T_L) \qquad (3)$$

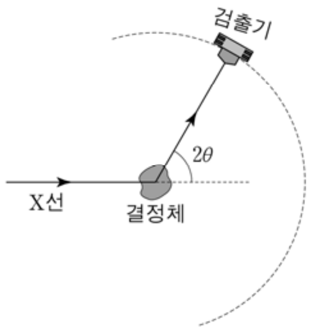
(2)식으로부터

$$Q_H = Q_L\frac{T_H}{T_L} \qquad (4)$$

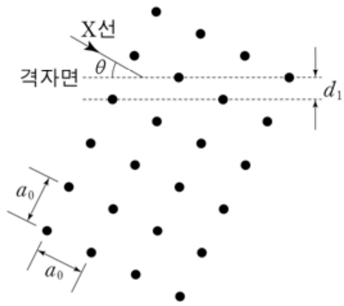
$$W = Q_H - Q_L = Q_L\frac{T_H}{T_L} - Q_L = Q_L\left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) = k(T_H - T_L)\left(\frac{T_H - T_L}{T_L}\right) = k\frac{(T_H - T_L)^2}{T_L}$$

2013년2차 2교시

그림 (가)는 파장 λ인 X선이 결정체에 입사하였을 때, 산란된 X선을 검출하는 것을 나타낸 모식도이다. 입사된 X선과 산란된 X선의 진행 방향이 이루는 각은 2θ이다. 그림 (나)는 정방구조 결정체에서 파장 λ인 X선이 간격 d_L인 격자면에 각 θ로 입사하는 것을 나타낸 것이다. θ는 X선 방향과 격자면 사이의 각이고 a_0은 격자상수이다.



(가)



(나)

3-1.<자료 1>과 <자료 2>를 근거로 하여 A 교사의 의도대로 수업이 잘 진행되지 않은 부분과 그 원인을 <자료 1>의 3가지 수업 방법 측면에서 각각 논하시오. 또한, 김 교사의 제안에 따라 <자료 1>의 [교수.학습 활동]을 다시 작성하시오. 박 교사의 주장처럼 개별 활동을 모둠활동으로 재구성할 때 기대되는 장점을 2가지 쓰고, 이에 대해 비고츠키(L.Vygotsky)의 이론(사회문화적 관점)을 바탕으로 설명하시오.[20점]

3-2.<자료 3>의 그림 (가)에서 간격이 d인 이웃한 두 결정면에 의한 X선 회절 무늬 세기가 1차 최대인 조건식을 유도하시오. 그림 (나)에서 결정체의 a_0과 d_1의 관계식을 구하고, $\lambda = 0.1\,\mathrm{nm}$인 X선을 사용하여 $\theta = 30^\circ$에서 1차 최대 회절 신호가 검출되었을 때 a_0을 구하시오.[10점]

[풀이]

Bragg condition : $2d\sin\theta = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

1차 최대인 조건은 $n=1$인 경우

$$2d\sin\theta = \lambda$$

입방결정의 (hkl)면간 거리 : $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{h^2+k^2+l^2}{a_0^2}$: Cubic

(210)면간 거리는

$$\frac{1}{d^2} = \frac{2^2+1^2+0^2}{a_0^2} = \frac{5}{a_0^2}$$

$d = \dfrac{a_0}{\sqrt{5}}$: 면간 거리

$$2d\sin 30^\circ = 0.1\,\mathrm{nm}$$

$$d = 0.1\,\mathrm{nm}$$

$$a_0 = \sqrt{5}\,d = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{10} = \sqrt{\frac{5}{100}} = \sqrt{\frac{1}{20}}\,\mathrm{nm} = 0.2236\,\mathrm{nm} = 2.236\,\mathrm{\AA}$$

면간 거리

살창구조의 면간 거리

$$\frac{1}{d^2}=\frac{h^2+k^2+l^2}{a^2}$$: Cubic

$$\frac{1}{d^2}=\frac{h^2+k^2}{a^2}+\frac{l^2}{c^2}$$: Tetragonal

$$\frac{1}{d^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{h^2+hk+k^2}{a^2}\right)+\frac{l^2}{c^2}$$: Hexagonal

$$\frac{1}{d^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}$$: Orthorhombic

2012년1차 열역학

24. 고체의 비열 C에 대한 데바이(Debye) 모형과 자유전자 페르미(Fermi) 기체 모형의 결과를 종합하면, 온도 T가 데바이 온도 Θ_D와 페르미 온도 T_F보다 매우 낮은 경우 금속 고체의 비열은 $C=\gamma T+AT^3$으로 표현된다. 여기서 γ와 A는 양의 상수로 물질의 고유 값이다. 이 비열식에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 자유전자 페르미 기체는 페르미-디락(Fermi-Dirac) 분포를 따른다.[2.5점]

<보기>

ㄱ. C의 두번째 항(AT^3)은 격자 진동에 기인한다.
ㄴ. 페르미 에너지가 커지면 γ도 커진다.
ㄷ. $\gamma = 6.5\times10^{-4}\mathrm{J/mol\cdot K^2}$이고 $A = 1.7\times10^{-4}\mathrm{J/mol\cdot K^4}$인 경우, 온도 범위 $0\mathrm{K} < \mathrm{T} \le 1\mathrm{K}$에서는 전자에 의한 비열이 격자 진동에 의한 비열보다 C에 더 크게 기여한다.

(답) ㄱ, ㄷ

금속 열들이의 실험값(experimental heat capacity of metals)

$T \ll \theta, T_F$인 매우 낮은 온도에서 금속의 열들이는

$$C=\gamma T+AT^3$$

◆ γT : 전자의 기여, AT^3 : 포논의 기여,

전자에 의한 열용량은 T의 일차함수이며 충분히 낮은 온도에서 지배적이다.

전자에 의한 열용량

$$C_{el} = \frac{1}{3}\pi^2 D(\epsilon_F)k_B^2 T \qquad (34)$$

$k_BT_F = \epsilon_F$인 자유전자 기체에서는

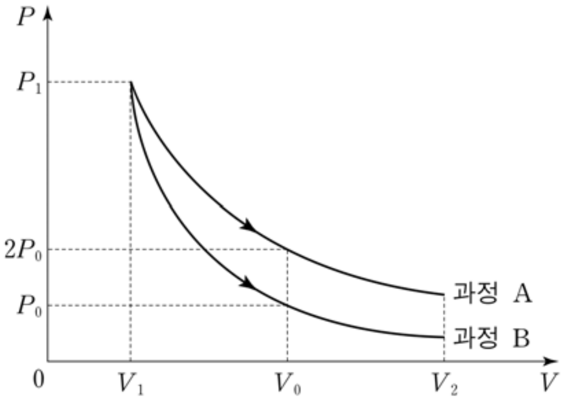
$$D(\epsilon_F) = 3N/2\epsilon_F = 3N/2k_BT_F$$

전자기체의 열용량

$$C_{el} = \frac{1}{2}\pi^2 Nk_BT/T_F \qquad (36)$$

◆ 페르미 에너지가 커지면 자유전자의 열용량에 대한 기여는 줄어든다.

28. 그림은 비열비가 $\dfrac{c_P}{c_V}=\gamma$인 같은 종류의 단원자 이상기체가 각각 1몰(mol)씩 들어 있는 두 실린더에 대해, 부피 V에 따른 압력 P를 나타낸 것이다. 기체의 부피가 V_1일 때 압력은 P_1로 서로 같고, 각 실린더의 기체는 과정 A 혹은 B를 통해 V_1에서 V_2로 증가한다. A와 B 중 하나는 단열과정이고 다른 하나는 등온과정이다. A, B에서 부피가 V_0일 때, 압력은 각각 $2P_0$, P_0이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. A는 등온과정이다.
ㄴ. B에서 기체의 내부에너지는 감소한다.
ㄷ. V_0에서 접선의 기울기의 크기는 B가 A의 $\dfrac{\gamma}{2}$배이다.

(답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

과정A(등온과정) :

$pV=$ 일정

$d(pV)= Vdp+pdV=0$

$\dfrac{dp}{dV}=-\dfrac{p}{V}$: 등온과정의 기울기

과정B(단열과정)

$pV^{\gamma}=$ 일정

$d(pV^{\gamma})= V^{\gamma}dp+\gamma V^{\gamma-1}pdV=0$

$\dfrac{dp}{dV}=-\gamma\dfrac{p}{V}$: 단열과정의 기울기

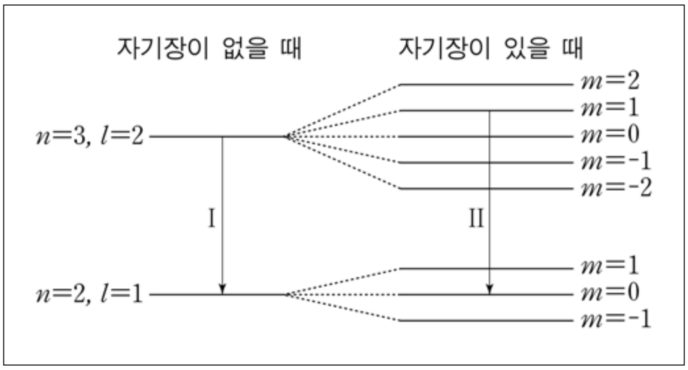
◆ 단열과정의 기울기는 등온과정의 기울기보다 절대값이 크다.

V_0지점에서 기울기의 비교

$$\left|\frac{dp}{dV}\right|_{(\text{등온})}=\frac{p}{V}=\frac{2p_0}{V_0}$$

$$\left|\frac{dp}{dV}\right|_{(\text{단열})}=\gamma\frac{p}{V}=\gamma\frac{p_0}{V_0}=\frac{\gamma}{2}\frac{2p_0}{V_0}=\frac{\gamma}{2}\left|\frac{dp}{dV}\right|_{(\text{등온})}$$

39 그림은 원자의 상태 (n, l)이 (2, 1)인경우와 (3, 2)인 경우에, 외부 자기장이 없을 때의 에너지 준위와 외부 자기장이 있을 때의 에너지 준위들을 모식적으로 나타낸 것이다. Ⅰ은 자기장이 없을 때의 전이이고, Ⅱ는 자기장이 있을 때 선택규칙에 의해 허용되는 전이 중 하나이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, n, l, m은 각각 전자의 주양자수, 궤도 양자수, 자기 양자수이고, 전자의 스핀은 고려하지 않는다. 선택규칙은 전기쌍극자에 의한 것만 고려한다.)

ㄱ. 전자의 궤도운동으로 생기는 자기 모멘트와 외부 자기장과의 상호작용으로 $l \neq 0$인 에너지 준위들이 분리된다. ㄴ. $(l, m) = (2, 0)$에서 $(l, m) = (1, 0)$으로의 전이는 선택규칙에 의해 허용되지 않는다. ㄷ. 전이 Ⅰ에 해당되는 한 개의 스펙트럼선이 외부 자기장에 의해 3개의 스펙트럼선으로 분리되어 나타난다.

(답) ㄱ, ㄷ

정상 Zeeman효과

<보충>

예제 9.3 스핀을 포함하는 수소의 Zeeman Spectrum

$n = 2$인 상태에 있는 수소원자의 스핀을 포함한 Zeeman spectrum을 그려보아라.

$B = 1.0\mathrm{T}$

(풀이)

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} B (L_Z + g S_Z)$$
$$= \frac{e\hbar}{2m} B (m_l + g m_s)$$
$$\mu_B B = \hbar \omega_L$$
$$\mu_B B = (9.27 \times 10^{-24} \mathrm{J/T})(1.0\mathrm{T})$$
$$= 9.27 \times 10^{-24} \mathrm{J} = 5.79 \times 10^{-5} \mathrm{eV}$$
$$E_2 = -(13.6\mathrm{eV})/2^2 = -3.40\mathrm{eV}$$

궤도 각운동량의 자기에너지에 대한 기여는

$$U_o = m_l \hbar \omega_L$$
$$E_2,\ E_2 \pm \hbar\omega_L$$

전자의 spin에 의한 자기에너지에 대한 기여

$U_S = (gm_s)\hbar\omega_L$

$n=2$인 전자의 에너지 준위는

$E_2,\ E_2 \pm \hbar\omega_L,\ E_2 \pm 2\hbar\omega_L$

바닥상태는 spin에 의한 자기에너지의 기여로 인해

$E_1 \pm \hbar\omega_L$

전이로 방출되는 에너지는

$\varDelta E_{2,1},\ \varDelta E_{2,1} \pm \hbar\omega_L,\ \varDelta E_{2,1} \pm 2\hbar\omega_L,\ \varDelta E_{1,2} \pm 3\hbar\omega_L$

$\varDelta(m_l + m_s) = 0,\ \pm 1$: 선택률에 의해

$\omega_{2,1} \pm 3\omega_L$ 선은 나타나지 않는다.

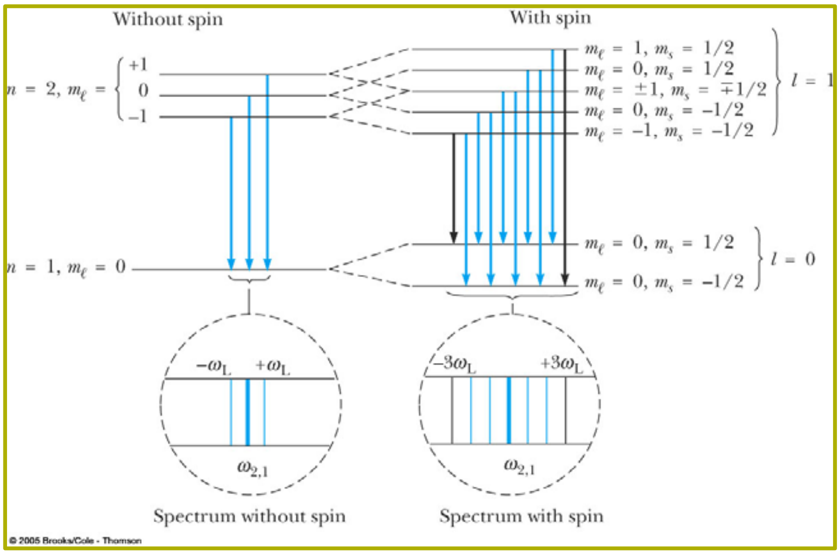


그림 9.9 전자스핀을 고려하였을 때 수소의 n=2 상태로 들뜬 전자의 예상되는 Zeeman 형태와 원자전이.

Paschen-Back 효과

spin- 궤도 상호작용에 의한 에너지보다 Zeeman energy $\hbar\omega_L$이 훨씬 클 때(매우 강한 자기장에서) 그림(9.9)와 같이 나타나는 spectrum 갈라짐

2012년2차 1교시

<상황3> 그림과 같이 상대론적 총 에너지가 E_0인 입자 A가 정지해 있던 입자 B와 탄성 충돌한 후, 각각 동일한 각 θ로 산란되었다. A와 B의 정지 질량은 m으로 동일하다.

충돌 전 충돌 후

1-2 <상황 3>에서 산란각 θ의 표현식을 m, E_0, 빛의 속력 c로 나타내고, 이로부터 충돌 전 A의 속력이 c보다 매우 작은 경우와 c에 매우 가까운 경우로 나누어 산란각의 근사값을 구하시오. 또한 이를 통해 충돌 전 A의 속력에 따른 산란각의 변화에 대해 추론하시오.[10점]

[풀이]

$\gamma_0 mc^2 + mc^2 = 2\gamma mc^2$

$\gamma_0 + 1 = 2\gamma$

$\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\gamma_0 m v_0 = 2\gamma m v \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\gamma_0 m v_0}{2\gamma m v} = \dfrac{\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot v_0}{2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\cdot v}$

1) $v_0 \ll c$인 경우

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2\times\frac{1}{2}mv^2, \quad v_0^2 = 2v^2 \quad\rightarrow\quad v_0 = \sqrt{2}\,v \qquad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_0 m v_0}{2\gamma m v} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot v_0}{2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\cdot v} \fallingdotseq \frac{v_0}{2v} \qquad (2)$$

(2)을 (1)에 대입하여

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad \theta = 45^\circ$$

2) $v_0 \sim c$ 인 경우 $\gamma_0 \simeq 2\gamma \gg 1$

$$\gamma_0 \sim 2\gamma$$

$$1 - v^2/c^2 \simeq 4(1 - v_0^2/c^2)$$

$$4v_0^2/c^2 - v^2/c^2 = 3 \quad\rightarrow\quad 4v_0^2 - v^2 = 3c^2 \quad\rightarrow\quad v^2 = 4v_0^2 - 3c^2$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_0 v_0}{2\gamma v} \simeq \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{4v_0^2 - 3c^2}} = \frac{v_0}{v_0\sqrt{4 - 3c^2/v_0^2}} \simeq 1$$

$$\cos\theta \simeq 1 \quad\rightarrow\quad \theta \simeq 0^\circ$$

3) $v_0 \ll c$에서 $\theta = 45^\circ$로부터 속력이 증가함에 따라 점차 감소하여 $v_0 \sim c$인 영역으로 접근함에 따라 산란각은 $\theta = 0^\circ$로 수렴한다.

2011년1차

25. 수소원자의 $2p$상태에 있는 전자의 규격화된 파동함수가 구면 좌표계 (r,θ,ϕ)에서

$$\psi_{211}(r,\theta,\phi)=-\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^5}}re^{-r/2a_0}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

로 주어진다. 이 상태에 있는 전자를 원자핵으로부터 거리 r에서 발견할 지름확률밀도(radial probability density)가 최대가 되는 r값은? (단, a_0은 보어 반지름이다.) 2011년[1.5점]

(답) $4a_0$

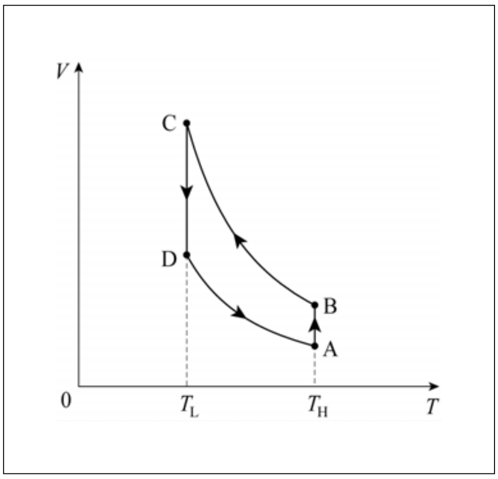
$$P_{211}(r)=4\pi r^2\,|\,\psi_{211}\,|\,^2=Ar^4e^{-r/a_0}$$

$$\frac{dP}{dr}=A4r^3e^{-r/a_0}+Ar^4(-1/a_0)e^{-r/a_0}=0$$

$$r^3(4-r/a_0)=0$$

$$r=4a_0$$

39. 그림은 이상적인 열기관에 사용된 단원자 분자 이상기체의 상태가 A → B → C → D → A의 경로를 따라 변할 때, 기체의 부피 와 절대온도 의 관계를 나타낸 것이다. A → B와 C → D는 등온과정이고, B → C와 D → A는 단열과정이며, H 와 L은 각각 고온 열원과 저온 열원의 절대온도이다.



이 열기관에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점]

<보 기>

ㄱ. A → B에서 증가한 기체의 엔트로피는 C → D에서 감소한 기체의 엔트로피와 같다.

ㄴ. 열기관의 효율은 $1-\dfrac{T_L}{T_H}$이다.

ㄷ. 이상기체가 A → B → C에서 한 일은 C → D → A에서 외부로부터 받은 일과 같다.

(답) ㄱ, ㄴ

[풀이] Carnot cycle를 (VT-graph)로 그린 것.

40. 에너지가 E인 광자의 상태밀도(density of states)는 $D(E)=\dfrac{8\pi V}{h^3c^3}E^2$이다. V는 광자가 차지한 공간(cavity)의 부피이다. 절대온도가 T일 때 단위 부피 안의 광자의 수는? (단, h는 플랑크상수, c는 빛의 속력, k_B는 볼츠만 상수이고, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2.4$ 이다.)

(답) $19.2\pi\left(\dfrac{k_BT}{hc}\right)^3$

[풀이] 광자의 상태밀도 : $D(E)=\dfrac{8\pi V}{h^3c^3}E^2$

에너지가 E인 광자의 수 : $n(E)=\dfrac{1}{e^{E/kT}-1}$

단위부피 안의 광자의 수는

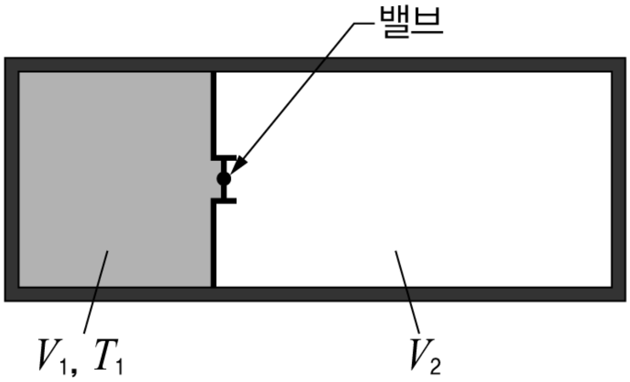
$$N=\frac{1}{V}\int_0^\infty D(E)n(E)dE=\frac{8\pi}{h^3c^3}\int_0^\infty E^2\cdot\frac{1}{e^{E/kT}-1}dE=8\pi\left(\frac{k_BT}{hc}\right)^3\cdot 2.4$$

$$=19.2\pi\left(\frac{k_BT}{hc}\right)^3$$

$$x=\frac{E}{kT},\quad E^2=x^2k^2T^2,\quad dE=kTdx$$

2011년2차 2교시

4. 다음은 자유팽창을 하는 기체의 온도 변화를 기술한 것이다.
그림은 내부 및 외부와 열적으로 고립된 단단한 용기에 단원자 분자로 이루어진 기체가 얇은 칸막이에 의해 왼쪽에 갇혀 있는 것을 나타낸 모식도이다. 왼쪽 기체의 부피와 온도는 각각 V_1, T_1이고, 분자의 수는 $N = nN_0$(n은 몰 수, N_0는 아보가드로 수)이다. 오른쪽은 진공이고 부피는 V_2이다. 밸브를 열면 기체가 자유팽창을 하게 되는데, 전체 계가 평형 상태에 도달하게 되면 기체의 온도는 T_3가 된다.



이 자유팽창에서 기체의 내부에너지는 변화가 없으므로 $dE = TdS - pdV = 0$ 식을 만족한다. 엔트로피 변화는 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

$$dS = \frac{p}{T}dV \tag{1}$$

엔트로피의 변화를 온도와 부피로 나타내면 식(2)가 된다. 여기서 c_V는 정적 몰비열이다.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{nc_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \tag{2}$$

식 (1)과 (2)로부터 식 (3)을 얻는다.

$$dT = \frac{1}{nc_V}\left[p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]dV \tag{3}$$

기체의 상태 방정식을 알면 $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$를 구하여 식 (3)을 적분함으로써 기체의 온도 변화 $\Delta T = T_3 - T_1$을 계산할 수 있다. 이 기체를 이상 기체, 반데르발스 기체, 기체 X라고 가정했을 때, 각각의 경우에 온도 변화를 구해 보면 아래 표와 같다. 표에서 $R = N_0 k$는 기체 상수, k는 볼츠만 상수, a와 b는 상수이다. 온도 변화 과정 동안 c_V는 변하지 않는다고 가정한다.

기체	상태 방정식	ΔT
이상 기체	$pV = nRT = NkT$	A
반데르발스 기체	$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT = NkT$	B
기체 X	$\frac{p}{kT} = \frac{N}{V}\left[1 + \left(-\frac{a}{N_0^2 kT} + \frac{b}{N_0}\right)\frac{N}{V}\right]$	C

상수 a, b의 물리적 의미와 기체 분자 사이의 퍼텐셜 에너지 그래프를 이용하여 $A = 0$이고 $B = C < 0$의 관계가 성립하는 이유를 설명하고, 반데르발스 기체의 상태 방정식과

기체 X의 상태 방정식이 $\left(\frac{bn}{V}\right)^2$을 포함하는 항까지 같게 되는 조건을 구하고 그 조건의 의미를 설명하시오.[20점]

[풀이]

1) a, b의 물리적 의미

a : 기체분자의 인력에 의한 측정 압력의 감소

b : 기체분자의 체적에 의한 실재 부피의 증가

2) 기체분자 사이에는 분자인력이 작용하는데 이 힘은 전기력이든 만유인력이든 역자승 인력이므로 분자간 퍼텐셜은

$$U = -\frac{k}{d}$$

자유팽창으로 분자간 거리가 커지므로 퍼텐셜은 증가한다. 따라서 운동에너지의 감소를 초래한다.

① 이상기체의 경우

상호작용이 없으므로 페텐셜의 변화가 없고 따라서 운동에너지의 변화도 없어 온도의 변화가 없다. 즉

$$A = 0$$

② 반데르발스 기체와 기체 X

분자간 평균거리가 증가하므로 퍼텐셜이 증가하고 운동에너지가 감소한다. 즉 온도가 감소한다.

$$B = C < 0$$

③ $\left(\frac{bn}{V}\right)^2$을 포함하는 항까지 같게 되는 조건

Maxwell relations

$$dE = TdS - pdV \qquad (5.6.1)$$

이 식으로부터 다음 관계식(Maxwell relation)이 유도된다.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \qquad (5.6.2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \qquad (5.6.3)$$

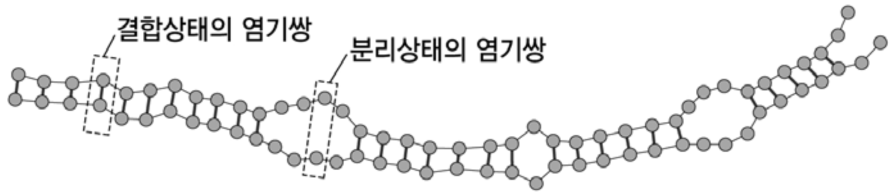
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad (5.6.4)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad (5.6.5)$$

- ✓ $T, S, p,$ and V 서로 완전 독립이 아니고 열역학 기본관계식(5.6.1)을 만족한다.
- ✓ 막스웰 관계식은 모두 동등하다. 하나의 식으로부터 단순히 독립변수만을 변화시켜 다른 식을 유도할 수 있다.

2010년1교시

27. 그림과 같이 DNA는 같은 수의 염기가 일렬로 배열된 두 가닥의 사슬로 구성되며, 서로 다른 사슬에 있는 짝을 이루는 염기와 결합하여 결합상태의 염기쌍을 형성한다.



DNA 구조의 열적 안정성을 조사하기 위하여 다음과 같은 이상적인 모형을 생각하자.

[모형]
- ○ 모든 염기는 오직 짝을 이루는 염기와 상호작용하며, 결합 상태와 분리 상태 중 하나의 상태만을 갖는다.
- ○ 결합상태와 분리 상태의 염기쌍의 에너지는 각각 $-\epsilon, 0$ 이다.
- ○ 염기의 운동에너지와 공간적 자유도에 의한 엔트로피는 무시한다.

이 모형을 이용하여 분석한 결과로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?
(단, $\epsilon > 0$, $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$, k_B는 볼츠만 상수, T는 절대온도이다.)

<보기>
ㄱ. 온도 T에서 염기쌍이 분리상태에 있을 확률은 $\dfrac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}$이다.
ㄴ. T가 증가할 때, 염기쌍이 결합상태에 있을 확률은 감소한다.
ㄷ. 온도 T에서 염기쌍 하나의 평균 에너지는 $\dfrac{-\epsilon e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$이다.

(답) ㄱ, ㄴ, ㄷ
[풀이]
염기쌍의 결합을 조화력에 의한 결합으로 본다.
염기쌍의 partition function은

$$Z = \sum e^{-\beta E_i} = e^{-\beta(-\epsilon)} + e^{-\beta(0)} = e^{\beta\epsilon} + 1$$

분리상태에 있을 확률은, $E=0$이므로

$$P(E=0) = \frac{e^{-\beta(0)}}{Z} = \frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

결합상태에 있을 확률은, $E=-\epsilon$ 이므로

$$P(-\epsilon) = \frac{e^{\beta\epsilon}}{Z} = \frac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

염기쌍 하나의 평균에너지 $\overline{E}$는

$$\overline{E} = \sum E_i P(E_i) = 0 \cdot P(0) + (-\epsilon) \cdot P(-\epsilon) = \frac{-\epsilon e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

28. 내부가 진공 상태인 밀폐된 금속 상자를 가열하면 상자의 내부 벽면으로부터 전자기파의 복사가 일어난다. 상자의 절대온도가 T일 때, 상자 내부에 생성된 광자의 총 에너지는 T^4에 비례한다. T를 2 배로 증가시켰을 때, 광자의 총 엔트로피는 몇 배로 증가하는가? (단, 금속 상자의 부피 변화는 무시한다.)

(답) 8배

[풀이] 흑체복사

$$e_{total} = \int_0^{\infty} e_f df = \sigma T^4$$: Stefan-Boltzmann 법칙 (3.3)

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \mathrm{K}^{-4}$$: Stefan-Boltzmann 상수

→전체 방출률은 절대온도의 4승에 비례한다.

$$dQ = dE + p dV$$

$V = \mathrm{const.}$이므로

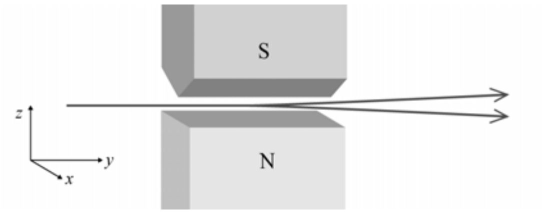
$$dQ = dE \quad \rightarrow \quad E = \sigma T^4$$

$$dQ = dE = 4\sigma T^3 dT$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = 4\sigma T^2 dT$$

$$\Delta S = \int_0^T 4\sigma T^2 dT = \frac{4}{3}\sigma T^3$$

31. 은(silver) 원자는 하나의 최외각 전자를 갖는다. 은 원자에 속해있는 전자들의 총 각운동량은 최외각 전자 하나의 스핀 각운동량과 같기 때문에, 그림과 같이 z방향으로 불균일한 자기장에 y방향으로 입사시킨 은 원자빔은 z방향으로 두 갈래로 갈라졌다. 이 실험을 슈테른-게를라흐(Stern-Gerlach) 실험이라고 한다.

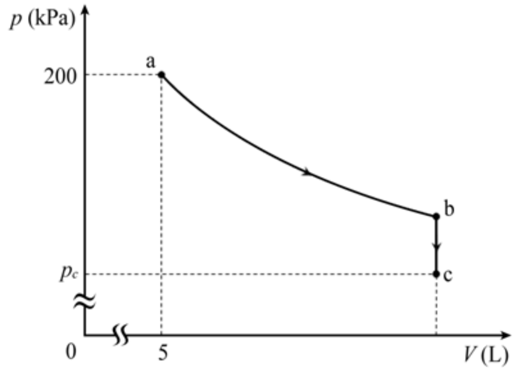


이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>
ㄱ. 자기장 속에서 은 원자의 스핀 각운동량의 방향은 항상 자기장의 방향과 같다.
ㄴ. 전자 한 개의 스핀 각운동량 양자수는 $\frac{1}{2}$이다.
ㄷ. 균일한 자기장에 은 원자 빔을 입사시켜도 은 원자 빔은 두 갈래로 갈라진다.

(답) ㄴ

36. 그림은 정적비열이 $1.5R$ (R는 기체상수)인 1몰의 이상기체가 상태 a에서 b까지 등온팽창 한 후, 일정한 부피에서 압력이 감소되어 압력 p_c인 상태 c로 가는 과정을 나타낸 것이다. a에서 압력은 200 kPa이고, 부피는 5L이다. a에서 b까지 등온 팽창하는 동안 기체의 엔트로피는 $R\ln 2$만큼 증가하였다.



기체의 압력이 b에서 c까지 감소되는 동안 기체가 600 J의 열을
방출하였을 때, 압력 p_c는? [2.5점]

(답) 60 kPa

[풀이]

등온과정의 엔트로피의 변화

$$\Delta S = R\ln\frac{V_b}{V_a} \quad \Delta S = \ln 2\text{이므로}$$

$$V_b = 2V_a = 10\ell = 10^{-2}\mathrm{m}^3$$

bc과정은 등적과정이므로

$$Q_{bc} = \Delta E = c_V(T_b - T_c) = c_V\left(\frac{p_a V_a}{R} - \frac{p_c V_c}{R}\right)$$

$$= 1.5R \cdot \frac{1}{R}(2\times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} - p_c \times 10^{-2})$$

$$Q_{bc} = 600\,\mathrm{J}$$

$$1.5(10^3 - 0.02p_c) = 600\mathrm{J}$$

$$400 = 10^3 - p_c \cdot 10^{-2}$$

$$p_c = 600\times 10^2\mathrm{Pa} = 60\mathrm{kPa}$$

2009년1차

35. 온도 T_1인 계 A가 온도 T_2인 열원(heat reservoir) B와 열 접촉하고 있으며, 이들은 외부로부터 고립되어 있다. 계 A는 열원 B로부터 열에너지를 흡수하여 압력은 일정하게 유지된 채로 온도가 T_2로 상승하였다. 이 과정에서 열원 B의 엔트로피의 변화는? (단, R은 기체상수, n은 계 A의 몰 수이며, 계 A의 정압 몰비열 c_p는 일정하다.)

(답) $nc_p\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)$

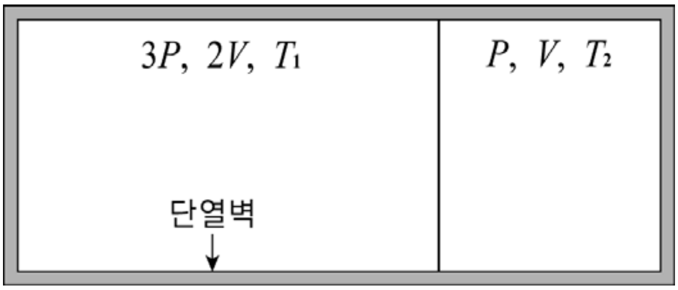
[풀이]

등압과정

$$nc_p(T_2 - T_1) = \Delta Q_A \ \text{: A계가 열원으로부터 흡수한 열}$$

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q_B}{T_2} = \frac{-\Delta Q_A}{T_2} = -nc_p(T_2 - T_1)/T_2 = nc_p\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)$$

36. 그림은 열적으로 고립된 실린더 속에서 같은 종류의 기체가 얇은 벽으로 나누어진 것을 나타낸다. 초기에 왼쪽 부분의 압력, 부피, 온도는 각각 $3P, 2V, T_1$이고, 오른쪽은 P, V, T_2이다.



기체 분자는 단원자분자이고 이상기체처럼 행동한다고 할 때, 얇은 벽을 제거한 후 평형 상태에 도달하였을 때 온도와 압력은?

(답) $\dfrac{7T_1T_2}{T_1+6T_2}$ $\dfrac{7}{3}P$

[풀이]

$$3p \cdot 2V = n_1RT_1 \qquad (1)$$

$$pV = n_2RT_2 \qquad (2)$$

$$p' \cdot 3V = (n_1+n_2)RT' \qquad (3)$$

$$n_1 = \frac{6pV}{RT_1} \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{pV}{RT_2} \qquad (4)$$

$$n_1+n_2 = \frac{pV}{R}\left(\frac{6}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) = \frac{pV}{R}\left(\frac{T_1+6T_2}{T_2T_2}\right) \qquad (5)$$

계의 내부에너지는 보존되므로

$$E_1 = 1.5n_1RT_1 \quad \text{and} \quad E_2 = 1.5n_2RT_2$$

$$E' = 1.5(n_1+n_2)RT'$$

$E_1+E_2 = E'$ 에 (4), (5)를 대입하여

$$E_1+E_2 = 1.5\times 6pV + 1.5\times pV = 10.5pV$$

$$E' = 1.5\frac{pV}{R}\left(\frac{T_1+6T_2}{T_1T_2}\right)RT' = 1.5pV\left(\frac{T_1+6T_2}{T_1T_2}\right)T'$$

$$1.5pV\left(\frac{T_1+6T_2}{T_1T_2}\right)T' = 10.5pV$$

$$T' = \frac{10.5}{1.5}\left(\frac{T_1T_2}{T_1+6T_2}\right) = \frac{7T_1T_2}{T_1+6T_2} \qquad (6)$$

(6)을 (3)에 대입하여

$$p' = \frac{(n_1+n_2)RT'}{3V} = \frac{1}{3V}\frac{pV}{R}\left(\frac{T_1+6T_2}{T_1T_2}\right)R\left(\frac{7T_1T_2}{T_1+6T_2}\right) = \frac{7}{3}p$$

37. 질량 m, 선운동량 p_x, 탄성계수 K인 1차원 고전 단진자의 에너지는 $\frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{2}Kx^2$으로 주어진다. 그리고 질량 M, 선운동량 $\overrightarrow{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$, 관성모멘트 I인 3차원 고전 자유 이원자 분자의 운동에너지는 병진운동에너지와 회전운동에너지의 합 $\frac{1}{2M}(P_x^2+P_y^2+P_z^2)+\frac{1}{2I}\left(L_\theta^2+\frac{L_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)$으로 주어진다. 여기서 L_θ와 L_ϕ는 각각 각운동량의 θ성분과 ϕ성분이다. 상온의 절대온도 T에서 이들 분자 한 개의 평균 운동에너지를 옳게 짝 지은 것은? (단, k_B는 볼츠만 상수이다.)

(답) 1차원 고전 단진자 : k_BT 3차원 고전 이원자 분자 : $\frac{5}{2}k_BT$

[풀이] 균등분배 원리 : 에너지에 대한 하나의 자승 항(혹은 자유도)에 $\frac{1}{2}kT$씩의 에너지가 분배된다.

1차원 고전 단진자 : 2개의 자승 항 → $u=k_BT$

3차원 고전 이원자 분자 : 5개의 자승 항 → $u=\frac{5}{2}k_BT$

2008년

17. 압력 P, 부피 V, 온도 T인 n 몰의 반데르발스 기체는 다음과 같은 상태방정식을 만족한다.

$$\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$$

여기서 a, b, R은 모두 상수이다. 온도 T인 이 기체 n 몰이 부피 V_1에서 V_2로 등온 팽창하는 동안 기체가 외부에 한 일 W를 구하시오.[3점]

[풀이 과정과 답]

$$P=\left(\frac{1}{V-nb}\right)\left[nRT-\frac{n^2a}{V^2}(V-nb)\right]=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{n^2a}{V^2}$$

$$\begin{aligned}W&=\int_{V_1}^{V_2}PdV=\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{nRT}{V-nb}\right)dV-\int_{V_1}^{V_2}\frac{n^2a}{V^2}dV\\&=nRT\ln\left(\frac{V_2-nb}{V_1-nb}\right)+n^2a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)\\&=nRT\ln\left(\frac{V_2-nb}{V_1-nb}\right)-\frac{n^2a(V_2-V_1)}{V_1V_2}\end{aligned}$$

19. 일차원상에 N개의 분자가 배열되어 있는 온도가 T인 계에서, 각 분자들은 분자 사이의 탄성력에 의해 일정한 각진동수 ω로 진동하고 있다. 분자의 진동에너지는 $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$이고, $n=0, 1, 2, \cdots$이다. 이 분자들의 진동에 의한 계의 분배함수 Z와 평균에너지 $\overline{E}$를 구하시오.[4점]

[풀이과정과 답]

●계의 분배함수 Z:

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta\hbar\omega}$$

$$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}(1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+\cdots) = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

●계의 평균에너지 $\overline{E}$

$$\ln Z = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln(1-e^{-\beta\hbar\omega})$$

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

$$\overline{E} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right)$$

※ 조화진동자

$$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$$

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}E_n}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \qquad (7.6.8)$$

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta\hbar\omega}$$

$$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}(1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+\cdots) = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln(1-e^{-\beta\hbar\omega})$$

(7.6.8)에 의해

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

$$\overline{E} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right) \qquad (7.6.12)$$

$\beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$인 경우

$$\overline{E} = \hbar\omega\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(1+\beta\hbar\omega+\cdots)-1}\right] \approx \hbar\omega\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right]$$

$$\approx \hbar\omega\left[\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right] \qquad \text{by virtue of (7.6.5)}$$

$$\overline{E} = \frac{1}{\beta} = kT \qquad (7.6.14)$$

◆ 고전적 결과를 만족

$\beta\hbar\omega = \dfrac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$인 경우

$$\overline{E} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + e^{-\beta\hbar\omega}\right) \simeq \frac{1}{2}\hbar\omega$$; 바닥상태

2007년

10. 세 개의 축퇴되지 않은 에너지 고유치 $-\mu B, 0, +\mu B$만을 가질 수 있는 스핀 1인 입자가 절대온도 T인 열원과 열적 평형 상태에 있다. 이 입자의 분배함수와 평균에너지를 구하시오. (단, Boltzmann 상수는 k임.) [3점]

、분배함수 $Z = e^{-\frac{\mu B}{kT}} + e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1$

、평균에너지 $\overline{E} = \dfrac{\mu B e^{-\frac{\mu B}{kT}} - \mu B e^{\frac{\mu B}{kT}}}{Z} = \dfrac{\mu B e^{-\frac{\mu B}{kT}} - \mu B e^{\frac{\mu B}{kT}}}{\left(e^{-\frac{\mu B}{kT}} + e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1\right)}$

☞ 분포함수와 분배함수

$f(E_i) = Ce^{-E_i/kT}$: 분포함수(distribution function)

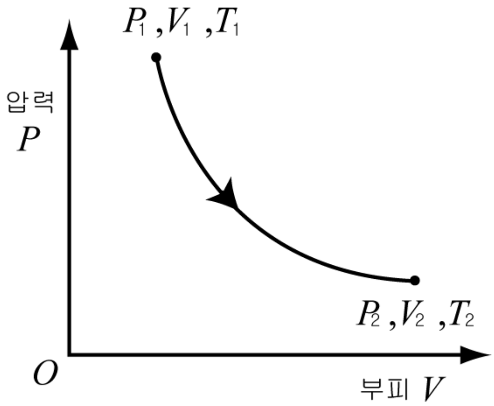
$$\sum_i f_i(E_i) = \sum_i Ce^{-E_i/kT} = C\sum_i\left(e^{-E_i/kT}\right) = 1$$

$\therefore C = \dfrac{1}{\sum_i e^{-E_i/kT}} = \dfrac{1}{Z}$: 정규화 상수(normalization function)

$Z = \sum_i e^{-E_i/kT}$: 분배함수(partition function)

$\overline{E} = \dfrac{\sum E_i f(E_i)}{Z}$: 평균에너지

24. 그림은 n몰의 단원자 이상기체를 이용한 열기관의 작동 과정 일부를 나타내는 압력-부피 그래프이다. 압력, 부피, 절대온도가 각각 P_1, V_1, T_1인 처음 상태에서 P_2, V_2, T_2인 상태로 부피가 늘어나는 동안 이 기체는 $PV^2 = K$ (K는 상수)를 만족한다. 이 과정에서 기체가 외부에 한 일 W, 방출한 열, 엔트로피 변화 ΔS를 T_1, T_2의 함수로 구하시오. (단 기체상수는 R임). [3점]



● W :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{K}{V^2} dV = -K\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$
$$= \frac{P_1 V_1^2}{V_1} - \frac{P_2 V_2^2}{V_2} = P_1 V_1 - P_2 V_2 = nR(T_1 - T_2)$$

◆ $T_1 > T_2$

● 방출한 열 :

$$Q = \Delta E + W = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) + nR(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} nR(T_2 - T_1)$$

◆ $Q < 0$

● ΔS :

$V_1 \rightarrow V_2$ 등온과정을 거친 후 $V_2 = \mathrm{const.}$ $T_1 \rightarrow T_2$ 등적과정으로 가역과정의 설정하여 엔트로피를 구한다.

등적과정

$$\Delta S_{등온} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dE + pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot \frac{1}{T} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{(3/2) nR dT}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_2}{T_1}$$

2006년

20 부피 V인 용기 속에 질량 m인 같은 종류의 이상기체 분자 N개가 들어 있다. 기체 분자의 절대온도가 T일 때, 이 계의 분배함수는

$$Z=\frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{3N/2}V^N$$

으로 주어진다. 여기서 k_B는 볼츠만 상수, h는 플랑크 상수이다. 주어진 분배함수를 이용하여 기 계의 평균에너지와 상태방정식을 계산하시오. [3점]

●평균 에너지

$$\ln Z=N\left[\ln V-\frac{3}{2}\ln\beta+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)-\ln N+1\right]$$

$$\overline{E}=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=\frac{3}{2}\frac{N}{\beta}=\frac{3}{2}NkT=N\overline{\epsilon}$$

$$\overline{\epsilon}=\frac{3}{2}kT$$

●상태방정식

$$\overline{p}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial V}=\frac{N}{\beta}\frac{1}{V}=\frac{NkT}{V}\ \text{혹은}\ \overline{p}V=NkT\ \ ;\ \text{상태방정식}$$

이상기체

$$Z=\frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{3N/2}V^N$$

$$\ln Z=N\left[\ln V-\frac{3}{2}\ln\beta+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)-\ln N+1\right]\qquad(7.2.7)$$

열역학적 물리량

$$\overline{E}=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta},\quad\overline{p}=\beta\frac{\partial\ln Z}{\partial V}$$

$$\overline{E}=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=\frac{3}{2}\frac{N}{\beta}=\frac{3}{2}NkT=N\overline{\epsilon}$$

$$\overline{\epsilon}=\frac{3}{2}kT$$

$$C_V=\frac{\partial\overline{E}}{\partial T}=\frac{3}{2}Nk=\frac{3}{2}nN_Ak=\frac{3}{2}nR\ \ ;\ \text{열용량}$$

$$c_V=\frac{3}{2}R\ \ ;\ \text{몰비열}$$

$$\overline{p}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial V}=\frac{N}{\beta}\frac{1}{V}=\frac{NkT}{V}\ \text{혹은}\ \overline{p}V=NkT\ \ ;\ \text{상태방정식}$$

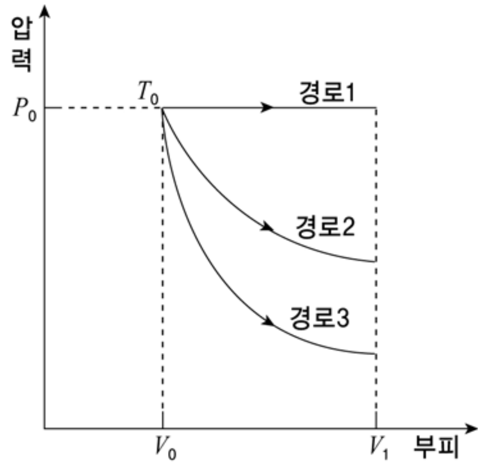
구분 불가능하면 ; $Z=\frac{\zeta^N}{N!}$

$$\ln Z=N\ln\zeta-\ln N!$$

$$\ln Z=N\ln\zeta-N\ln N+N$$

2005년

11. 그림은 1몰의 단원자 분자로 이루어진 이상기체가 처음 상태 (P_0, V_0, T_0) 에서 각각 등압과정(경로1), 등온과정(경로2), 단열과정(경로3)을 거쳐서 부피가 V_1 으로 팽창되는 과정을 나타낸 것이다. 각 경로에서, 부피가 V_1 일 때의 온도 T_1, T_2, T_3 와 이상기체가 한 일 W_1, W_2, W_3 을 구하여 아래 표를 완성하시오. (3점)



	온 도	일
경로1	$T_1 = (\frac{P_0 V_1}{R})$	$W_1 = P_0(V_1 - V_0)$
경로2	$T_2 = T_0$	$W_2 = RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$
경로3	$T_3 = (\frac{1}{R} P_0 V_1^{1-\gamma} V_0)$	$W_3 = \frac{3}{2} P_0 V_0 \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{2/3}\right]$

$\gamma = \frac{5}{3}$: 단원자 이상시체의 비열비

(풀이)

1) $P_0 V_0 = RT_0$, $P_0 V_1 = RT_1$

$$T_1 = \frac{P_0 V_1}{R}$$

2) $W = \int_{V_0}^{V_1} P dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$

$$= RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$$

3) $P_0 V_0^\gamma = P_3 V_1^\gamma \;\rightarrow\; P_3 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma$

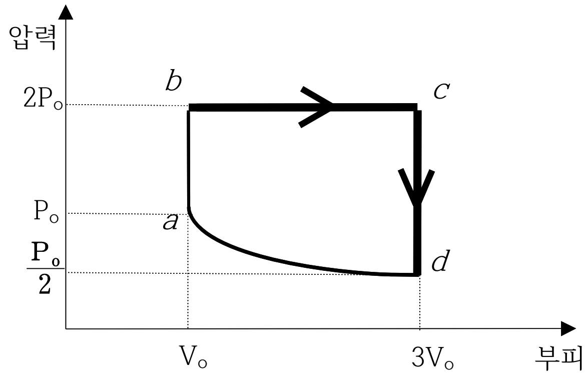
$$P_3 V_1 = RT_3$$

$$\rightarrow T_3 = \frac{P_3 V_1}{R} = \frac{V_1}{R} \cdot P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma$$

$$= \frac{P_0}{R} V_1^{1-\gamma} V_0^\gamma$$

2004년

18. 단원자 이상기체 1몰이 그림과 같은 순환과정을 거친다. $b \rightarrow c$ 와 $c \rightarrow d$ 경로에서 한 일과 유입 또는 방출되는 열을 각각 V_o와 P_o로 나타내시오. [3점]



b → c 과정 일 : $4P_0V_0$

열 : $10P_0V_0$

c → d 과정 일 : 0

열 : $-\frac{27}{4}P_0V_0$

(풀이)

단원자 기체 1몰

b → c : 등압과정

$dQ = du + PdV$: → $Q = \Delta u + W$

$W = \int_b^c PdV = 2P_0(3V_0 - V_0) = 4P_0V_0$

$2P_0V_0 = RT_b$: b 지점

$2P_0 \cdot 3V_0 = RT_c$: c 지점

$\Delta u = u_c - u_b = \frac{3}{2}RT_c - \frac{3}{2}RT_b = \frac{3}{2}R\left(\frac{6P_0V_0}{R} - \frac{2P_0V_0}{R}\right) = 6P_0V_0$

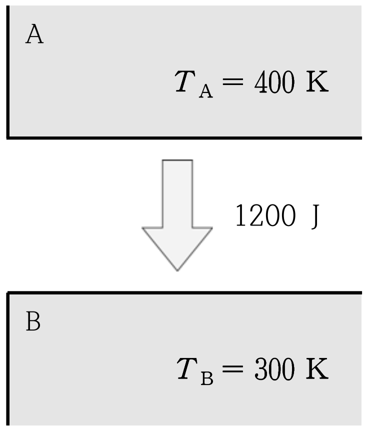
$\therefore\ Q = \Delta u + W = 6P_0V_0 + 4P_0V_0 = 10P_0V_0$

c → d : 등적과정 $dV = 0$, $W = \int_c^d PdV = 0$

$Q = \Delta u = \frac{3}{2}R(T_d - T_c) = \frac{3}{2}R\left(\frac{3P_0V_0}{R} - \frac{6P_0V_0}{R}\right) = -\frac{27}{4}P_0V_0$

2003년

9. 그림과 같이 온도 $T_A = 400\mathrm{K}$인 열원 A에서 온도 $T_B = 300\mathrm{K}$인 열원 B로 1200J의 열이 이동하였다. 각 열원의 온도는 변화가 없다. (총 4점)



9-1. 열원 A와 열원 B의 엔트로피 변화 ΔS_A와ΔS_B를 각각 구하시오. (2점)

$$\Delta S_A = \frac{Q_A}{T_A} = \frac{-1200\mathrm{J}}{400\mathrm{K}} = -3(\mathrm{J/K})$$

$$\Delta S_B = \frac{1200\,\mathrm{J}}{300\,\mathrm{K}} = 4\,\mathrm{J/K}$$

9-2. 위 9-1의 결과를 이용하여 열역학 제2법칙을 설명하시오. (2점)

$$\Delta S_T = \Delta S_A + \Delta S_B = 1\,\mathrm{J/K}$$

열역학 제2법칙 : A와 B로 구성된 계의 자연과정에서 엔트로피는 증가한다.

11. 분자 수$\boldsymbol{N}$, 부피$\boldsymbol{V}$인 이상기체의 양자 상태수(배열방법의 수)$\boldsymbol{\Omega}$는
$\boldsymbol{\Omega(E,V,N) = f(N)\,V^N E^{3N/2}}$ 으로 주어진다. 여기서$\boldsymbol{f(N)}$ 은$\boldsymbol{N}$의 함수이며,$\boldsymbol{E}$는 내부에너지이다. (총 3점)

11-1. 기체의 엔트로피를 구하시오. (1점)

$$S = k_B \ln\Omega = k_B(\ln f(N) + N\ln V + \frac{3N}{2}\ln E$$

11-2. 기체의 내부에너지$\boldsymbol{E}$를 온도의 함수로 구하시오. (1점)

$$\beta = \frac{\partial \ln\Omega}{\partial E} = \frac{3N}{2}\frac{1}{E}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$ 이므로

$$E = \frac{3}{2}NkT$$

11-3. 위의 이상기체 분자$\boldsymbol{N}$개를 이원자 분자$\boldsymbol{N}$개로
대체하였을 경우, 양자 상태수$\boldsymbol{\Omega}$는 어떻게 수정되
는지 쓰시오. 이 때, 기체의 온도는 수백 K이어서 진동자유도는 고려하지 않는다. (1점)

$$\Omega(E,V,N) = f(N)\,V^N E^{5N/2}$$

⊙ 단원자 이상기체

$E_{\text{int}} = 0$

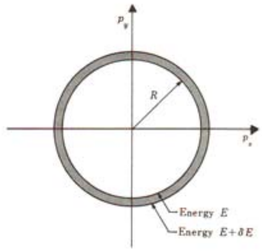
$$E = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} = \sum_i^N \frac{1}{2m} \sum_\alpha^3 p_i \alpha^2 \qquad (2.5.16)$$

☞ $\vec{p}_i^{\,2} = p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + p_{i3}^2$

☞ $f = 3N$ 개의 제곱 항

☞ 운동량공간의 $3N(=f)$차원에서 반지름

$R = [2mE]^{\frac{1}{2}}$인 구



차원 f일 때 구의 부피 $\propto R^f$

$\Phi(E) \sim R^f = R^{3N} \sim E^{\frac{3}{2}N}$

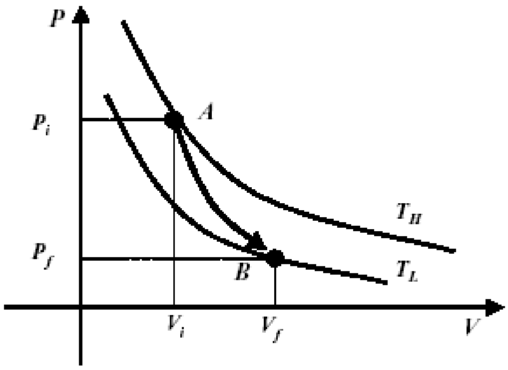
$\Omega(E) = \frac{\partial \Phi}{\partial E} \delta E \propto E^{\frac{3}{2}N-1}$ $\quad (\sim E^{\frac{3}{2}N}$: N이 매우 클 때)

$\rightarrow \Omega(E) = BV^N E^{\frac{3}{2}N}$ $\quad$ (B : 임의의 상수)]

☞ N은 Avogadro의 차수이므로 $\Omega(E)$는 에너지의 증가에 따라 극도로 급히 증가한다.

2002년

16. 그림은 1몰의 단원자 이상기체로 작동하는 카르노 기관의 압력(P)-부피(V) 그래프이다. 기체는 단열 팽창과정을 거쳐 상태 A (온도 T_H, 압력 P_i, 부피 V_i)에서 상태 B (온도 T_L, 압력 P_f, 부피 V_f)로 된다. 기체상수는 R, 내부 에너지는 E로 표시하라. (총 3점)



16-1. 단열 과정(dQ=0)에서 열역학 제 1법칙과 단원자 기체 1몰의 상태방정식을 수식으로 표현하시오. (1점)

$du + PdV = 0$: 열역학 제1법칙

$PV = RT$: 기체1몰의 상태방정식

16-2. 위의 그림에서 상태 A에서 상태 B로 단열 팽창하는 동안 1몰의 기체가 한 일을 온도 T_H, T_L로 구하시오. (1점)

$$W = -\triangle u = u_A - u_B$$
$$= \frac{3}{2}RT_H - \frac{3}{2}RT_L = \frac{3}{2}R(T_H - T_L)$$

(답) $W = \frac{3}{2}R(T_H - T_L)$

16-3. 문항 16-1의 결과를 이용하여 $P_i V_i^{\frac{5}{3}} = P_f V_f^{\frac{5}{3}}$ 임을 증명하시오. (1점)

$$u = \frac{3}{2}RT \qquad du = \frac{3}{2}RdT$$

$$PdV = \frac{RT}{V}dV$$

$$du + PdV = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV = 0$$

$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V}$ 적분하면

$$\ln T = -\frac{2}{3}\ln V + C$$

$\ln TV^{\frac{2}{3}} = C \qquad \therefore TV^{\frac{2}{3}} = C \quad \cdot \cdot \ast$

$PV = RT \rightarrow T = \frac{PV}{R}$을 $\ast$ 에 대입

$$TV^{\frac{2}{3}} = \frac{PV}{R}V^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{R}PV^{\frac{5}{3}} = C$$

즉, $PV^{\frac{5}{3}} =$ 일정

or $P_i V_i^{\frac{5}{3}} = P_f V_f^{\frac{5}{3}}$

문제의 난이도 혹은 요구하는 노동에 비해 점수가 너무 낮다.

17. 에너지가 $\epsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0$ 로 주어지는 한 개의 선형 조화 진동자로 이루어진 계를 고려하자. 이 계의 에너지가 ϵ_n인, n상태에 있을 확률은 다음과 같이 주어진다.

$P_n = Ce^{-\beta\epsilon_n}$, $n = 0,1,2,3...$, $\beta = \frac{1}{k_B T}$

여기서 C는 상수이다. (총 3점)

17-1. 바닥 상태($n=0$)에 있을 확률P_0와 첫 번째 들뜬 상태($n=1$)에 있을 확률P_1의 비($\frac{P_1}{P_0}$)를 구하시오. (2점)

(풀이)

$$P(E) = Ce^{-E/k_B T}\text{이므로}$$

$$P_0 = Ce^{-(1/2)\hbar\omega_0/k_B T} \quad \text{and} \quad P_1 = Ce^{-(3/2)\hbar\omega_0/k_B T}$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{Ce^{-(3/2)\hbar\omega_0/k_B T}}{Ce^{-(1/2)\hbar\omega_0/k_B T}} = e^{-\hbar\omega_0/k_B T}$$

17-2. 극저온($k_B T \ll \hbar\omega_0$)에서 선형 조화 진동자는 어떤 에너지 상태에 있겠는가? 문항 17-1의 결과를 이용하여 답하시오. (1점)

(풀이)

$$\frac{P_n}{P_0} \sim 0 \quad \text{when } n \neq 0\text{이므로}$$

조화 진동자는 바닥상태 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ 에 있다.

2001년

14. 아인슈타인 모델을 이용하여 계산한 고체의 정적비열은

$$c_V \;=\; 3N_A k_B\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T}-1)^2}$$

으로 주어진다. 고온일때와 저온일 때의 비열을 각각 구하고, 각 경우의 열적 특징을 쓰시오.

(참조 : $e^x \;=\; 1 \;+\; x \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+ ......$) (총 6점 : 풀이 2점, 답 4점)

1)$h\omega \gg k_B T$: 저온

$$c_V \simeq 3N_A k_B\left(\frac{h\omega}{k_B T}\right)^2 e^{-h\omega/k_B T} \rightarrow 0$$

2)$hw \ll k_B T$: 고온

$$\frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T}-1)^2} \simeq \frac{1}{(1+\hbar\omega/k_B T-1)^2} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2$$

$$c_V \simeq 3N_A k_B\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 = 3N_A k_B = 3R$$

특징:1)저온 $T \rightarrow 0$ $c_V \rightarrow 0$ 미소량의 열 유입으로 급격한 온도의 상승

2)고온 $T \rightarrow \infty$, $c_V \rightarrow 3R$ 열 유입량에 비례하여 온도가 상승한다.($\Delta Q = c_V \Delta T$)

※Einstein model c_V의 증명

$$\overline{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \qquad \text{: 평균입자수}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$:진동자당 평균에너지

고체 1몰 원자의 내부에너지(진동에너지)는

$$U = 3N_A\bar{\epsilon} = 3N_A\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

정적비열은

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N_A\hbar\omega\frac{-e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}\left(\frac{\hbar\omega}{k}\right)\left(\frac{-1}{T^2}\right) = 3N_Ak\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}$$

2000년

14. 질량 m, 입자수 N, 평균속도 v 인 이상기체가 한 변의 길이 L인 정육면체 모양의 밀폐된 상자 속에 들어 있다. 다음 물음에 답하시오. (총5점)

14-1. 이 기체가 상자 면에 미치는 압력 P와 기체의 평균 운동에너지 E는 절대온도 T에 비례함을 보이시오. (3점)

기체 상태 방정식 $pV = nRT = (\frac{N}{N_A})RT \quad \therefore p \propto T$

기체 분자의 평균 운동에너지 $\overline{E_K} = \frac{3}{2}kT \qquad \therefore \overline{E_k} \propto T$

※ 문제의 배점으로 보아 $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$를 유도함이 타당할것같다.

속도 v_x인 기체가 오른쪽 벽면을 한번 충돌하여 얻게 되는 운동량의 변화는 $2mv_x$

1초당의 운동량의 변화 $2mv_x \frac{v_x}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}$

N 개의 분자가 1면에 미치는 힘

$$F = N\frac{m}{L}(\frac{v_{\mathrm{rms}}^2}{3})$$

$$P = \frac{F}{A} = N\frac{1}{L^3}\frac{2}{3}(\frac{1}{2}mv_{\mathrm{rms}}^2) = \frac{N}{V}\frac{2}{3}\overline{E_k}$$

$$PV = N\frac{2}{3}\overline{E_k} = nN_A\frac{2}{3}\overline{E_k} \cdots\cdots ☆$$

이상기체 상태방정식

$$PV = nRT \cdots \cdots ★$$

☆와★에서

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}kT$$

14-2. 이 기체의 부피를 2배로 자유 팽창시킬 때, 엔트로피의 변화 ΔS를 구하시오. (2점)
이 자유팽창에서는 기체의 온도는 불변
등온과정으로 $V \rightarrow 2V$로 팽창할 때의 엔트로피의 변화를 계산한다.

$$dQ = dU + p\,dV \quad dU = 0(\text{등온과정})$$

$$dQ = p\,dV$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_V^{2V} \frac{p}{T}dV$$

$$= \int_V^{2V} \frac{nRT}{TV}dV = nR\ln(\frac{2V}{V}) = nR\ln 2 = \frac{N}{N_A}R\ln 2$$

$$= N\frac{R}{N_A}\ln 2 = Nk\ln 2$$

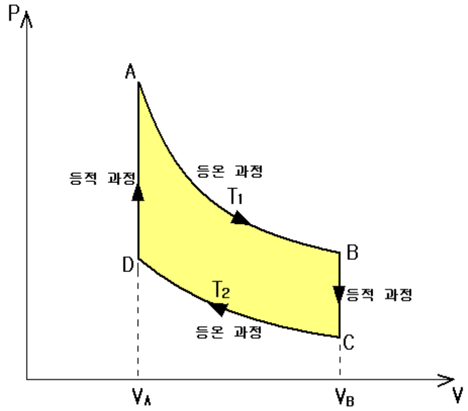
답) $\Delta S = Nk\ln 2$, 엔트로피의 증가

1999년-1

16번

그림과 같이 4개의 과정을 가지는 열기관에 1몰의 단원자 이상기체를 넣고 화살표 방향으로 과정이 순환되도록 열기관을 작동시켰다.

A점에서의 기체의 체적은 V_A이었고, B점에서의 체적은 V_B이었다. 기체 상수 R, 고온 열원의 온도 T_1, 저온 열원의 온도 T_2, V_A, V_B를 써서 다음 문제를 풀어라.



(1) A→B의 등온 팽창 과정에서 열기관이 흡수한 열량 Q_{AB}를 계산하라. (2점)

♣요령 및 힌트♣

$Q = \triangle u + W$;열역학 제1법칙

Q: 계에 유입된 열, $\triangle u$: 내부에너지의 변화, W: 계가 (외부에)한 일

♣풀이♣

$\triangle u = 0$($\because$ 이상기체의 내부에너지로 온도의 함수, $u = \frac{3}{2}RT$)

$$Q_{AB} = \int_{V_B}^{V_A} P\,dV = \int_{V_B}^{V_A} \frac{RT_1}{V}\,dV = RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

(답) $Q_{AB} = RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$

(2) 이 열기관의 열효율 ε을 구하라. (2점)

♣요령 및 힌트♣

열기관의 열 효율 ϵ

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H}$$

(Q_H: 1 cycle당 고온열원으로부터 유입된 열, W: 1 cycle 당 외부에 한 일)

1 cycle 당 계의 내부에너지의 변화는 없으므로

$Q_{\mathrm{net}} = W$

$Q_{\mathrm{net}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$

$Q_H = Q_{AB} + Q_{DA}$(T_1 열원으로부터 유입된 열)

♣풀이♣

$$Q_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} = -RT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$Q_{BC} = \triangle u_{BC} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = -\frac{3}{2}R(T_1 - T_2)$ 계 외부로 열의 유출

$$Q_{DA} = \triangle u_{DA} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_2)$$

$$\therefore \; Q_{net} = R(T_1 - T_2)\ln \frac{V_B}{V_A} = W$$

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{R(T_1 - T_2)\ln \frac{V_B}{V_A}}{RT_1 \ln (\frac{V_B}{V_A}) + \frac{3}{2}R(T_1 - T_2)}$$

(답)$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{R(T_1 - T_2)\ln \frac{V_B}{V_A}}{RT_1 \ln (\frac{V_B}{V_A}) + \frac{3}{2}R(T_1 - T_2)}$

1999년-2

15. 2원자 분자로 된 1몰의 이상기체가 상자에 들어 있다. 정압비열을 c_V , 정적비열을 c_p , R을 기체상수라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (총 3점)

(1)$c_p = c_V + R$ 임을 증명하시오. (2점)

♣풀이♣

$dQ = dU + p\,dV$: 열역학 제1법칙

정적과정 $dV = 0$이므로 $dQ = dU$

$$U = U_{병진} + U_{회전} = \frac{3}{2}RT + \frac{2}{2}RT = \frac{5}{2}RT$$

$$c_V dT = d(\frac{5}{2}RT) = \frac{5}{2}RdT$$

$$\therefore c_V = \frac{5}{2}R$$

정압과정 $dQ = dU + pdV$

$pV = RT \quad \rightarrow \quad pdV = RdT$

$c_p dT = c_V dT + RdT$

$c_p = c_V + R$

(답)$c_p = c_V + R$

(2) 이 기체의 내부에너지 $U = \frac{5RT}{2}$ 임을 설명하시오. (1점)

♣풀이♣ 기체분자의 평균 에너지 = 자유도 당 평균에너지 × 자유도

자유도당 평균 에너지 = $\frac{1}{2}kT$

이원자분자의 자유도 = 3(병진)+2(회전) =5

$\overline{E_k} = \frac{5}{2}kT$

$U = N_A \cdot \overline{E_k} = \frac{5}{2}N_A kT = \frac{5}{2}RT$

1998년

16. N개의 입자가 $E_1 = 0$, $E_2 = kT$, $E_3 = 2kT$의 세 에너지 상태로 분포되어 있다.

(1) 볼츠만 분포 함수를 이용하여 세 에너지 상태에서의 입자수 비를 구하시오. (1점)

(2) 평형 상태에서의 총 에너지를 구하시오($N = N_1 + N_2 + N_3$을 참조하시오). (2점)

(풀이)

(1) 입자수의 비

$$\overline{n_s} = N\frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$$

$$\sum_r e^{-\beta\epsilon_r} = e^{-0} + e^{-1} + e^{-2} = 1 + e^{-1} + e^{-2}$$

$$\overline{n_1} = \frac{Ne^{-\beta 0}}{1+e^{-1}+e^{-2}} = \frac{N}{1+e^{-1}+e^{-2}}$$

$$\overline{n_2} = \frac{Ne^{-\beta kT}}{1+e^{-1}+e^{-2}} = \frac{Ne^{-1}}{1+e^{-1}+e^{-2}}$$

$$\overline{n_3} = \frac{Ne^{-2\beta kT}}{1+e^{-1}+e^{-2}} = \frac{Ne^{-2}}{1+e^{-1}+e^{-2}}$$

따라서 입자수의 비는

$$\overline{n_1} : \overline{n_2} : \overline{n_3} = 1 : e^{-1} : e^{-2}$$

(2) 평형상태의 총 에너지

$$E_{tot} = \overline{n_1}E_1 + \overline{n_2}E_2 + \overline{n_3}E_3 = \frac{N}{1+e^{-1}+e^{-2}}(0 + kTe^{-1} + 2kTe^{-2})$$

$$E_{tot} = \frac{NkT(e^{-1}+2e^{-2})}{1+e^{-1}+e^{-2}} = 0.42NkT$$

Maxwell-Boltzmann 통계

Maxwell-Boltzmann 통계의 엄격한 고전 경우

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}$$

☞ 모든 상태 R에 대해 summation

☞ 입자들은 구별가능 ; $\{n_1, n_2, \cdots\}$의 가능한 배열 방법의 수

$$\star \ \frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \cdots} \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \cdots} \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots} (e^{-\beta\epsilon_1})^{n_1} (e^{-\beta\epsilon_2})^{n_2} \cdots$$

☞ 다항식의 전개 결과

$$Z = (e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2} + \cdots)^N$$

▶ $\ln Z = N \ln\left(\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}\right)$ (9.4.4)

따라서

$$\overline{n}_s = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} N \frac{-\beta e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$$

▶ $\overline{n}_s = N \dfrac{e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$ (9.4.7)

☞ Maxwell-Boltzmann 분포

1997년

22. 질량 2kg, 606℃의 알루미늄이 얼마의 시간이 흐른 후 20℃로 냉각되었다. 이때 알루미늄의 엔트로피 변화량을 구하시오. 알루미늄의 비열 $c = 901\,\mathrm{J/kgK}$ 이며
In2 = 0.693, In3 =1.099 이다. (2점)

[풀이]

$$dQ = cm\,dT \quad \text{and} \quad dS = \frac{dQ}{T} = cm\frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} dS = \int_{T_i}^{T_f} cm\frac{dT}{T} = cm \ln T \Big|_{T_i}^{T_f} = cm \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\Delta S = (901\,\mathrm{J/kgK})(2\,\mathrm{kg})\ln\frac{293}{879} = -1802\ln 3 = -1802 \times 1.099\,\mathrm{J/K} = -1980\,\mathrm{J/K}$$

◆ 엔트로피의 감소

23. 이상 기체의 에너지 분포 함수는

$$n(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}\sqrt{\epsilon}\, e^{-\epsilon/kT}d\epsilon$$

로 주어진다. 여기서 N은 분자의 개수, T는 절대 온도이다. 계의 총 내부에너지를 구하시오.

(3점) (참고; $\int_0^\infty \chi^{1/2} e^{-ax}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax}dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$)

[풀이]

$$E = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}\int_0^\infty \epsilon^{3/2}e^{-\epsilon/kT}d\epsilon$$

$$= \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}\frac{3}{4}(kT)^2\sqrt{\pi kT} = \frac{3}{2}NkT$$