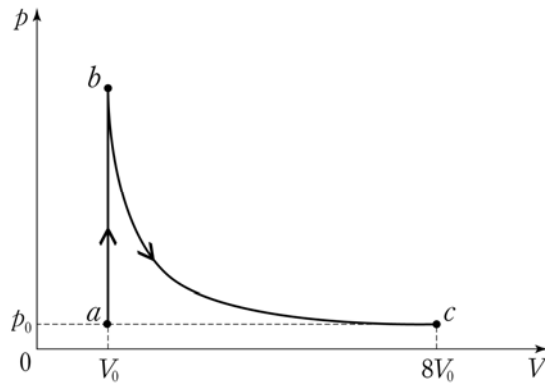


2016년 2교시

13. 그림은 1몰의 단원자 분자 이상 기체가 압력 p_0 , 부피 V_0 인 상태에서 $a \rightarrow b \rightarrow c$ 의 경로를 따라 변할 때, 기체의 압력 p 와 부피 V 의 관계를 나타낸 그래프이다. $a \rightarrow b$ 는 정적 과정, $b \rightarrow c$ 는 단열 과정이다.



$a \rightarrow b$ 과정에서 기체에 유입된 열에너지 Q_{ab} 와 $b \rightarrow c$ 과정에서 기체가 한 일 W_{bc} 를 각각 풀이 과정과 함께 구하시오. (단, 단원자 분자 이상 기체의 비열비 $\gamma = \frac{5}{3}$ 이다.) [4점]

[풀이]

열역학 제1법칙, $\Delta Q = \Delta U + W$ 과 $U = \frac{3}{2}RT$ 에서

$$Q_{ab} = U_b - U_a = \frac{3}{2}(RT_b - RT_a) = \frac{3}{2}(p_b V_0 - p_0 V_0) \quad (*)$$

$b \rightarrow c$ 는 단열과정이므로

$$p_b V_0^\gamma = p_0 (8V_0)^\gamma$$

$$p_b = p_0 8^\gamma = p_0 8^{5/3} = 32p_0 \text{ 을 } (*) \text{에 대입하면}$$

$$Q_{ab} = \frac{3}{2}(32p_0 V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} \cdot 31p_0 V_0 = 46.5p_0 V_0$$

$$W_{bc} = \int_{V_0}^{8V_0} p dV$$

$$p_b V_0^\gamma = p V^\gamma \quad p = p_b V_0^\gamma V^{-\gamma}$$

$$\begin{aligned} W_{bc} &= \int_{V_0}^{8V_0} p_b V_0^\gamma V^{-\gamma} dV = p_b V_0^\gamma \int_{V_0}^{8V_0} V^{-\gamma} dV \\ &= p_b V_0^\gamma \left| \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_0}^{8V_0} = (32p_0) V_0^{5/3} (-3/2) (8^{-2/3} V_0^{-2/3} - V_0^{-2/3}) \\ &= (-48)p_0 V_0^{5/3} (-3/4) V_0^{-2/3} = 36p_0 V_0 \end{aligned}$$

{답}

$$Q_{ab} = 46.5p_0 V_0$$

$$W_{bc} = 36p_0 V_0$$

2016년 3교시

5. N 개의 동일한 1차원 단순 조화 진동자로 이루어진 계가 있다. 진동자들은 1차원 격자에 고정되어 서로 독립적이고 서로 상호작용을 하지 않는다. 계를 이루는 진동자 1개의 허용 가능한 에너지는 $\epsilon_n = (2n+1)\epsilon_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 이다.

계는 절대 온도가 T 인 열원과 평형 상태에 있다. 계를 이루는 진동자 1개의 분배함수 Z_1 과 계의 평균 에너지 U 를 풀이 과정과 함께 구하시오. 또한 고온($k_B T \gg \epsilon_0$)에서의

근삿값 $U_{\text{고온}}$ 을 쓰시오. (단, ϵ_0 은 양의 상수이고, k_B 는 볼츠만 상수이며, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 이다.

$x \ll 1$ 일 때 $e_x \approx 1+x$ 를 이용하시오.)

[4점]

$$\epsilon_n = (2n+1)\epsilon_0 = (n+1/2)2\epsilon_0$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)2\beta\epsilon_0} \\ &= e^{-\beta\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(2\beta\epsilon_0)} \\ &= e^{-\beta\epsilon_0} \frac{1}{1 - e^{-2\beta\epsilon_0}} \end{aligned}$$

$$\ln Z_1 = -\beta\epsilon_0 - \ln(1 - e^{-2\beta\epsilon_0})$$

진동자의 평균에너지는

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = \epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0} - 1}$$

평균에너지 U 는

$$U = N\bar{\epsilon} = N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0} - 1}\right)$$

고온극한 $k_B T \gg \epsilon_0$ 에서의 $U_{\text{고온}}$ 은

$$U_{\text{고온}} = N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0} - 1}\right) \simeq N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{1 + 2\beta\epsilon_0 - 1}\right) = N(\epsilon_0 + k_B T)$$

2015년 1차 2교시 전공A

6. 질량이 m 인 단위자 분자 이상기체의 속력 v 에 대한 규격화된 맥스웰 분포함수는

$$D(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

이다. 이 기체 분자의 평균 속력을 구하는 적분식을 쓰고, 그 값을

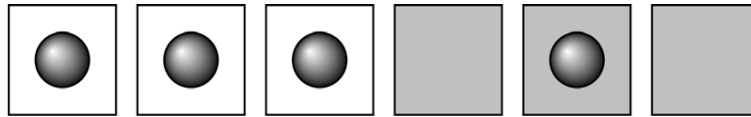
구하시오. (단, 필요하면 $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$ 을 활용하시오.)

[2점]

(답) 적분식 : $\bar{v} = \int_0^\infty v D(v) dv = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$

평균속력 : $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

3. 그림과 같이 흰 상자 3개와 검은 상자 3개가 있고 상자에 들어갈 수 있는 입자가 4개 있다. 각 상자에는 입자가 하나씩만 들어갈 수 있고, 모든 입자는 반드시 상자에 들어가야 한다. 입자가 흰 상자에 들어가면 J 의 에너지를 갖고, 검은 상자에 들어가면 $2J$ 의 에너지를 갖는다. 각 상자는 구별되지만, 입자는 구별되지 않는다.



계가 가질 수 있는 에너지 값을 모두 쓰고, 에너지 값 각각에 대해 미시상태의 겹침 수(축퇴도)를 쓰시오. 또한 계의 엔트로피가 가장 클 때의 에너지 값을 쓰고, 그 값에서 엔트로피가 가장 큰 이유를 설명하시오. [5점]

(답)

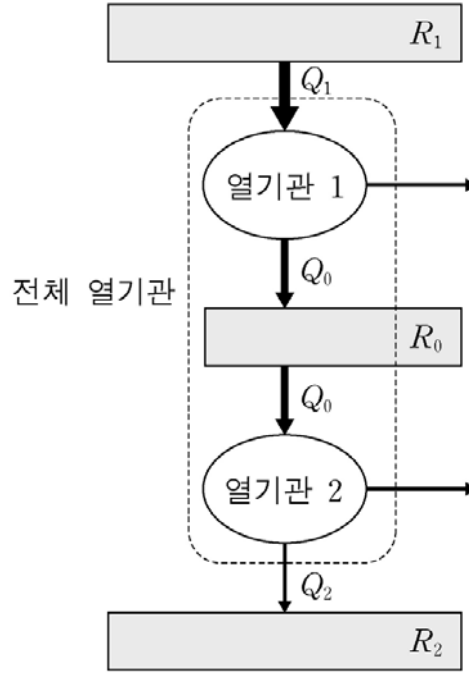
○			○	○	○	미시상태수 : 3 $E = 7J$
○	○		○	○		미시상태수 : $3 \times 3 = 9$ $E = 6J$
○	○	○	○			미시상태수 : 3 $E = 5J$

계의 엔트로피가 가장 클 때의 에너지 값 : $E = 6J$

이유 : 상태의 수가 가장 많으므로, $S = k \ln \Omega = k \ln 9$

2014년 2교시 전공A

10. 그림은 열효율이 각각 η_1 , η_2 인 열기관 1, 2가 결합되어 있는 전체 열기관을 나타낸 것이다. 열기관 1은 열원 R_1 에서 열 Q_1 을 흡수하여 열원 R_0 에 열 Q_0 을 배출하고 $(Q_1 - Q_0)$ 의 일을 한다. 열기관 2는 R_0 에서 Q_0 을 흡수하여 열원 R_2 에 열 Q_2 를 배출하고 $(Q_0 - Q_2)$ 의 일을 한다.



전체 열기관의 열효율을 η_1 과 η_2 로 나타내시오. [2점]

(풀이)

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{Q_0}{Q_1}, \quad \eta_2 = \frac{W_2}{Q_0} = \frac{Q_0 - Q_2}{Q_0}$$

전체 열기관의 열효율

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1} + \left(\frac{W_2}{Q_0} \right) \left(\frac{Q_0}{Q_1} \right) = \eta_1 + \eta_2 (1 - \eta_1) = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2$$

5. 상태방정식이 $(P+a)(v-b) = RT$ 로 주어지는 1mol의 기체가 있다. P , v , T 는 각각 압력, 부피, 온도이고 R 는 기체상수이며 a , b 는 양의 상수이다. 엔트로피의 변화는 다음 방정식을 만족한다.

$$Td s = c_v dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv$$

여기서 s , c_v 는 각각 1 mol에 대한 엔트로피와 정적비열이다.

이 기체가 온도 T_0 에서 가역 등온과정을 통해 부피가 v_1 에서 v_2 로 변했을 때, 기체가 한 일을 구하고, 이때 기체의 엔트로피 변화를 위 식을 사용하여 풀이 과정과 함께 구하시오. [4점]

(풀이)

기체가 한 일

$$P = \frac{RT}{v-b} - a$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} P dv = \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{RT_0}{v-b} - a \right) dv = RT_0 \ln \left(\frac{v_2-b}{v_1-b} \right) - a(v_2 - v_1)$$

엔트로피의 변화

등온과정이므로

$$Tds = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv, \text{ 그리고 } \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b} \quad \text{이므로}$$

$$\Delta s = \int_{v_1}^{v_2} \frac{R}{v-b} dv = R \ln \left(\frac{v_2-b}{v_1-b} \right)$$

2013년1차 열역학

30. 어떤 페르미온이 해밀토니안의 3가지 고유상태를 가지며, 세고유상태의 에너지는 각각 $0, \epsilon, 2\epsilon$ 이다. 이러한 동일한 페르미온 2개로 이루어진 계의 분배함수는? (단, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B 는 볼츠만상수이며 페르미온 간의 상호작용을 무시하고, 고유상태는 스핀과 공간 성분만을 고려한 것이다.)

(답) $e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} + e^{-3\beta\epsilon}$

[solution]

configuration			no. of states		
0	ϵ	2ϵ	MB	BE	FD
xx			1	1	--
	xx		1	1	--
		xx	1	1	--
x	x		2	1	1
x		x	2	1	1
	x	x	2	1	1

(a) $Z_{MB} = 1 + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-4\epsilon\beta} + 2e^{-\epsilon\beta} + 2e^{-2\epsilon\beta} + 2e^{-3\epsilon\beta}$

(b) $Z_{BE} = 1 + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-4\epsilon\beta} + e^{-\epsilon\beta} + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-3\epsilon\beta}$

(c) $Z_{FD} = e^{-\epsilon\beta} + e^{-2\epsilon\beta} + e^{-3\epsilon\beta}$

9.2 통계문제의 공식화

동일 입자 기체 ; N, V, T

r (or s) ; 단일 입자의 가능한 양자상태

ϵ_r ; r 상태에 있는 입자의 에너지

n_r ; r 상태에 있는 입자의 수

R ; 전체 기체의 가능한 양자 상태

입자들 사이에 무시할 수 있는 상호작용을 가정한다면 R 상태의 총에너지는

$$E_R = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + n_3\epsilon_3 + \cdots = \sum_r n_r \epsilon_r$$

$$\sum_r n_r = N$$

분배함수 ; 다양한, 모든 가능한 수치들 $n_1, n_2, n_3, \dots$ 을 포함

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots)} \quad (9.2.3)$$

상태 s 의 평균 입자수

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_R n_s e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}}$$

$$\bar{n}_s = \frac{1}{Z} \sum_R \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \right) e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)} = -\frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \epsilon_s}$$

or $\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} \quad (9.2.5)$

☞ 주어진 단일 입자 상태 s 에 있는 평균 입자수는 분배함수로 표현된다.

분산의 계산

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \overline{(n_s - \bar{n}_s)^2} = \overline{n_s^2} - \bar{n}_s^2 \quad (9.2.6)$$

$\overline{n_s^2}$ 은 정의에 의해

$$\overline{n_s^2} = \frac{\sum_R n_s^2 e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}}$$

따라서 $\overline{n_s^2} = \frac{1}{Z} \sum \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \right) \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \right) e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)} = \frac{1}{Z} \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \right)^2 Z$

or $\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2 Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \epsilon_s^2}$

(9.2.5)를 포함시켜 더 편리한 형태로 표현하면

$$\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \epsilon_s} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \epsilon_s} \right)^2 \right] = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} \right) + \beta^2 \bar{n}_s^2 \right]$$

따라서 (9.2.6)은

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \epsilon_s^2} \quad (9.2.9)$$

or $\overline{(\Delta n_s)^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{n}_s}{\partial \epsilon_s} \quad (9.2.10)$

☞ 따라서 흥미 있는 모든 물리량의 계산은 단순히 분배함수 (9.2.3)을 구하면 된다.

Maxwell-Boltzmann 통계

각 상태에 있는 가능한 모든 입자들의 수를 더한다.

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{각각의 } r \text{에 대해}$$

$$\sum_r n_r = N \quad (9.2.12)$$

☞ 입자는 구별가능

☞ $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ 는 변하지 않더라도 다른 상태에 있는 두 입자가 서로 교환할 때는 구분되는 상태

Bose-Einstein과 광자(photon) 통계

☞ 입자는 구별 불가능

☞ 수치 $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ 의 단순한 명시로서 기체의 상태를 명시하는 데 충분

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{각각의 } r \text{에 대해}$$

$$\sum_r n_r = N$$

Fermi-Dirac 통계

- ☞ 입자는 구별 불가능
- ☞ 수치 $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ 의 단순한 명시로서 기체의 상태를 명시하는 데 충분
- ☞ 각 상태에 한 개 이상의 입자는 존재할 수 없다.

$n_r = 0, 1$ 각각의 r 에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

9.3 양자 분포함수

이상기체에 대한 양자론의 본질적 특성

특정상태 s 내의 평균 입자수

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_1, n_2, \dots} n_s e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_s \epsilon_s + \dots)}}{\sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_s \epsilon_s + \dots)}} \quad (9.3.1)$$

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}} \quad (9.3.2)$$

광자 통계

총 입자수를 명기하지 않은 BE 통계

분자 분모의 $\sum^{(s)}$ 는 똑 같으므로 생략되어

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \epsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \epsilon_s}} \quad (9.3.3)$$

$$\bar{n}_s = \frac{(-1/\beta)(\partial/\partial \epsilon_s) \sum e^{-\beta n_s \epsilon_s}}{\sum e^{-\beta n_s \epsilon_s}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln(\sum e^{-\beta n_s \epsilon_s}) \quad (9.3.4)$$

$$\text{그런데 } \sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \epsilon_s} = 1 + e^{-\beta \epsilon_s} + e^{-2\beta \epsilon_s} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}}$$

$$\text{따라서 } \bar{n}_s = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_s}) = \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}}$$

$$\text{or } \bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} \quad (9.3.5)$$

Fermi-Dirac 통계

총 입자수 N

$n_r = 0, 1$ 각각의 r 에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

s 상태를 제외한 모든 상태에 대해 sum

$$Z_s(N) \equiv \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}$$

N 개의 입자가 이 상태에 존재한다면

$$\sum_r^{(s)} n_r = N \quad (s \text{ 상태는 이 sum에서 제외})$$

$n_s = 0$ 와 1에 대해 합하면

$$\bar{n}_s = \frac{0 + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1)}{Z_s(N) + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1)}$$

$$\text{or} \quad \bar{n}_s = \frac{1}{[Z_s(N)/Z_s(N-1)]e^{\beta\epsilon_s} + 1}$$

$Z_s(N-1)$ 을 $Z_s(N)$ 에 연관시켜 간단히 할 수 있다. $\Delta N \ll N$ 이면

$$\ln Z_s(N - \Delta N) = \ln Z_s(N) - \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} \Delta N = \ln Z_s(N) - \alpha_s \Delta N$$

$$\text{or} \quad Z_s(N - \Delta N) = Z_s(N) e^{-\alpha_s \Delta N} \quad (9.3.10)$$

$$\text{여기서} \quad \alpha_s \equiv \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} \quad (9.3.11)$$

α_s 가 s 에 무관하다면

$$\alpha_s = \alpha \quad (9.3.12)$$

$$\alpha = \frac{\partial \ln Z}{\partial N} \quad (9.3.13)$$

(9.3.10)에서 $\Delta N = 1$ 이면

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon_s} + 1} \quad (9.3.14)$$

☞ Fermi-Dirac 분포

1. α 의 결정

$$\sum_r \bar{n}_r = N$$

$$\text{or} \quad \sum_r \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon_r} + 1} = N$$

since the free energy $F = -kT \ln Z$, 와 (9.3.13)

$$\alpha = -\frac{1}{kT} \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\mu}{kT} = -\beta\mu$$

★ μ : 입자당 화학퍼텐셜(chemical potential)

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} + 1} \quad (9.3.18)$$

★ $\epsilon_s \gg 1$ then $\bar{n}_s \rightarrow 0$

★ $0 \leq \bar{n}_s \leq 1$; 파울리의 배타율

근사의 타당성에 대한 유의

$$Z(N) = Z_s(N) + e^{-\beta\epsilon_s} Z_s(N-1) = Z_s(N)(1 + e^{-\alpha - \beta\epsilon_s})$$

$$\text{or} \quad \ln Z = \ln Z_s + \ln(1 + e^{-\alpha - \beta\epsilon_s})$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial N} = \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} - \frac{e^{-\alpha - \beta \epsilon_s}}{1 + e^{-\alpha - \beta \epsilon_s}} \frac{\partial \alpha}{\partial N}$$

$$\text{or} \quad \alpha = \alpha_s - \bar{n}_s \frac{\partial \alpha}{\partial N}$$

$$\Leftrightarrow \text{if } \frac{\partial \alpha}{\partial N} \bar{n}_s \ll \alpha \quad \text{then} \quad \alpha_s = \alpha$$

Bose-Einstein 통계

$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ 각각의 r 에 대해

$$\sum_r n_r = N$$

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \epsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}} \quad (9.3.2)$$

$$\bar{n}_s = \frac{0 + e^{-\beta \epsilon_s} Z_s(N-1) + 2e^{-2\beta \epsilon_s} Z_s(N-2) + \dots}{Z_s(N) + e^{-\beta \epsilon_s} Z_s(N-1) + e^{-2\beta \epsilon_s} Z_s(N-2) + \dots} \quad (9.3.20)$$

$$\star \quad Z_s(N - \Delta N) = Z_s(N) e^{-\alpha_s \Delta N} \quad (9.3.10)$$

$$\star \quad \alpha_s \equiv \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} \quad (9.3.11)$$

$$\star \quad \alpha_s \text{가 } s \text{에 무관; } \alpha_s = \alpha \quad (9.3.12)$$

$$\bar{n}_s = \frac{Z_s(N)[0 + e^{-\beta \epsilon_s} e^{-\alpha} + 2e^{-2\beta \epsilon_s} e^{-2\alpha} + \dots]}{Z_s(N)[1 + e^{-\beta \epsilon_s} e^{-\alpha} + e^{-2\beta \epsilon_s} e^{-2\alpha} + \dots]}$$

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_s n_s e^{-n_s(\alpha + \beta \epsilon_s)}}{\sum_s e^{-n_s(\alpha + \beta \epsilon_s)}} \quad (9.3.21)$$

(9.3.4)의 계산과 동일한 과정에 의해

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s} - 1} \quad (9.3.22)$$

$\Leftrightarrow$ Bose-Einstein 분포

2. 매개변수 α 의 결정

$$\sum_r \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s} - 1} = N$$

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1} \quad (9.3.24)$$

$$\star \quad \alpha = -\beta \mu$$

$$\star \quad \text{광자; } \alpha = 0 \rightarrow \text{Planck 분포}$$

9.4 Maxwell-Boltzmann 통계

Maxwell-Boltzmann 통계의 엄격한 고전 경우

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}$$

$\Leftrightarrow$ 모든 상태 R 에 대해 summation

☞ 입자들은 구별가능 ; $\{n_1, n_2, \dots\}$ 의 가능한 배열 방법의 수

$$\star \frac{N!}{n_1! n_2! \dots}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} (e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} (e^{-\beta \epsilon_2})^{n_2} \dots$$

☞ 다항식의 전개 결과

$$Z = (e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + \dots)^N$$

$$\blacktriangleright \ln Z = N \ln \left(\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \right) \quad (9.4.4)$$

따라서

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} N \frac{-\beta e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}$$

$$\blacktriangleright \bar{n}_s = N \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}} \quad (9.4.7)$$

☞ Maxwell-Boltzmann 분포

분산의 계산

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta n_s)^2} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{n}_s}{\partial \epsilon_s} = -\frac{N}{\beta} \left[\frac{-\beta e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}} - \frac{-\beta e^{-\beta \epsilon_s} e^{-\beta \epsilon_s}}{(\sum_r e^{-\beta \epsilon_r})^2} \right] \\ &= \bar{n}_s \left(1 - \frac{\bar{n}_s}{N} \right) \approx \bar{n}_s \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

★ 마지막 단계는 $\bar{n}_s \ll N$ 이므로

상대분포는

$$\blacktriangleright \frac{\overline{(\Delta n_s)^2}}{\bar{n}_s^2} = \frac{1}{\bar{n}_s} \quad (9.4.9)$$

9.5 광자 통계

분배함수

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots)}$$

☞ $n_r = 0, 1, 2, \dots$, 그 외 제한사항 없음

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta n_1 \epsilon_1} e^{-\beta n_2 \epsilon_2} e^{-\beta n_3 \epsilon_3} \dots$$

$$Z = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1 \epsilon_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2 \epsilon_2} \right) \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-\beta n_3 \epsilon_3} \right) \dots$$

위 식은 간단히 더해지고 $\bar{n}_s$ 는

$$Z = \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_1}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_2}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_3}} \right) \dots$$

$$\ln Z = - \sum_r \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_r})$$

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}}$$

$$\blacktriangleright \bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} ; \text{Planck 분포}$$

분산의 계산

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{n}_s}{\partial \epsilon_s} = \frac{e^{\beta \epsilon_s}}{(e^{\beta \epsilon_s} - 1)^2}$$

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \frac{(e^{\beta \epsilon_s} - 1) + 1}{(e^{\beta \epsilon_s} - 1)^2} = \bar{n}_s + \bar{n}_s^2$$

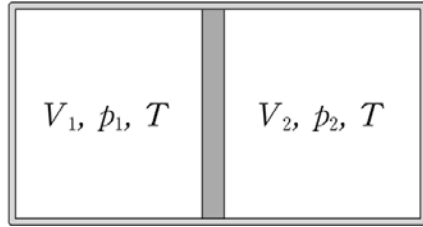
$$\text{hence } \overline{(\Delta n_s)^2} = \bar{n}_s (1 + \bar{n}_s)$$

$$\blacktriangleright \frac{\overline{(\Delta n_s)^2}}{\bar{n}_s^2} = \frac{1}{\bar{n}_s} + 1 ; \text{상대분산도}$$

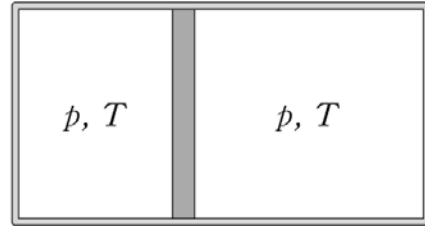
☞ 분산이 MB 경우보다 크다.

☞ $\bar{n}_s \gg 1$ 이라도 상대분산은 임의적으로 작지 않다.

31. 그림 (가)는 직육면체 상자를 좌우로 분리하는 피스톤이 고정되어 있고 양쪽에 이상기체가 채워져 있는 것을 나타낸 것이다. 왼쪽 부분의 부피와 압력은 각각 V_1, p_1 이고 오른쪽 부분은 V_2, p_2 이다. 그림 (나)는 (가)의 피스톤이 마찰 없이 좌우로 자유롭게 이동할 수 있게 되어 평형을 이룬 상태를 나타낸 것이며, 이때 압력은 p 이다. (가), (나)에서 기체의 온도는 T 로 일정하게 유지된다. 압력 p 는?



(가)



(나)

(답) $\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$

[풀이]

(가)의 각각에 대해

$$p_1 V_1 = n_1 R T \quad \text{and} \quad p_2 V_2 = n_2 R T$$

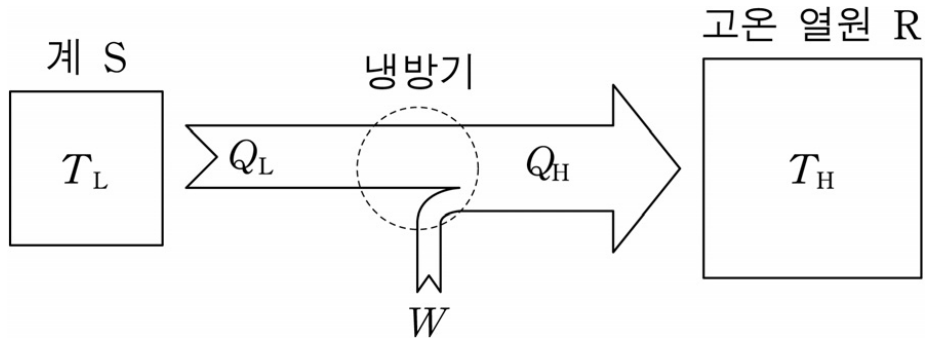
(나)에 대해

$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) R T$$

이것을 p 에 대해서 정리하면

$$p = \frac{n_1 R T + n_2 R T}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

32. 그림은 온도가 T_L 인 계 S와 온도가 T_H 인 고온 열원(heat reservoir) R 사이에서 카르노 순환과정에 따라 작동하는 냉방기에 의하여, 순환과정의 주기 τ 동안 S에서 열 Q_L 이 제거되고 R로 열 Q_H 가 방출되는 것을 모식적으로 나타낸 것이다. W 는 냉방기에 연결된 전기가 τ 동안 냉방기에 해 주는 일이다. τ 동안 S에 열 $k(T_H - T_L)$ 이 유입되지만 냉방기가 제거하는 Q_L 과 상쇄되어 S의 온도 T_L 은 일정하게 유지된다.



엔트로피는 카르노 순환과정의 엔트로피 변화만을 고려할 때, W 는? (단, k 는 양의 상수이고, $T_L < T_H$ 이며, 고온 열원은 충분히 커서 T_H 의 변화를 무시한다.) [2.5점]

(답) $k \frac{(T_H - T_L)^2}{T_L}$

[풀이]

$$Q_H = Q_L + W \quad (1)$$

Carnot 순환과정에서 열의 전달은 온도 T 에 비례하므로

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_L}{T_L} \quad (2)$$

$$Q_L = k(T_H - T_L) \quad (3)$$

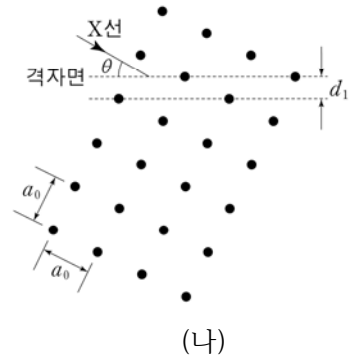
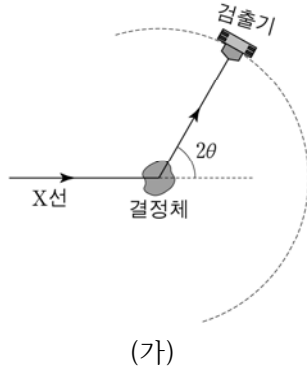
(2)식으로부터

$$Q_H = Q_L \frac{T_H}{T_L} \quad (4)$$

$$W = Q_H - Q_L = Q_L \frac{T_H}{T_L} - Q_L = Q_L \left(\frac{T_H}{T_L} - 1 \right) = k(T_H - T_L) \left(\frac{T_H - T_L}{T_L} \right) = k \frac{(T_H - T_L)^2}{T_L}$$

2013년2차 2교시

그림 (가)는 파장 λ 인 X선이 결정체에 입사하였을 때, 산란된 X선을 검출하는 것을 나타낸 모식도이다. 입사된 X선과 산란된 X선의 진행 방향이 이루는 각은 2θ 이다. 그림 (나)는 정방 구조 결정체에서 파장 λ 인 X선이 간격 d_L 인 격자면에 각 θ 로 입사하는 것을 나타낸 것이다. θ 는 X선 방향과 격자면 사이의 각이고 a_0 은 격자상수이다.



3-1.<자료 1>과 <자료 2>를 근거로 하여 A 교사의 의도대로 수업이 잘 진행되지 않은 부분과 그 원인을 <자료 1>의 3가지 수업 방법 측면에서 각각 논하시오. 또한, 김 교사의 제안에 따라 <자료 1>의 [교수.학습 활동]을 다시 작성하시오. 박 교사의 주장처럼 개별 활동을 모둠 활동으로 재구성할 때 기대되는 장점을 2가지 쓰고, 이에 대해 비고츠키(L.Vygotsky)의 이론(사회문화적 관점)을 바탕으로 설명하시오.[20점]

3-2.<자료 3>의 그림 (가)에서 간격이 d 인 이웃한 두 결정면에 의한 X선 회절 무늬 세기가 1차 최대인 조건식을 유도하시오. 그림 (나)에서 결정체의 a_0 과 d_1 의 관계식을 구하고, $\lambda = 0.1 \text{ nm}$ 인 X선을 사용하여 $\theta = 30^\circ$ 에서 1차 최대 회절 신호가 검출되었을 때 a_0 을 구하시오.[10점]

[풀이]

Bragg condition : $2d \sin \theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$

1차 최대인 조건은 $n = 1$ 인 경우

$$2d \sin \theta = \lambda$$

입방결정의 (hkl) 면간 거리 : $\frac{1}{d^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a_0^2} \quad \text{: Cubic}$

(210)면간 거리는

$$\frac{1}{d^2} = \frac{2^2 + 1^2 + 0^2}{a_0^2} = \frac{5}{a_0^2}$$

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} \quad \text{: 면간 거리}$$

$$2d \sin 30^\circ = 0.1 \text{ nm}$$

$$d = 0.1 \text{ nm}$$

$$a_0 = \sqrt{5} d = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{10} = \sqrt{\frac{5}{100}} = \sqrt{\frac{1}{20}} \text{ nm} = 0.2236 \text{ nm} = 2.236 \text{ \AA}$$

면간 거리

 **살창구조의 면간 거리**

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2} \quad : \text{Cubic}$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} \quad : \text{Tetragonal}$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{h^2 + hk + k^2}{a^2} \right) + \frac{l^2}{c^2} \quad : \text{Hexagonal}$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \quad : \text{Orthorhombic}$$

2012년1차 열역학

24. 고체의 비열 C 에 대한 데바이(Debye) 모형과 자유전자 페르미(Fermi) 기체 모형의 결과를 종합하면, 온도 T 가 데바이 온도 θ_D 와 페르미 온도 T_F 보다 매우 낮은 경우 금속 고체의 비열은 $C = \gamma T + AT^3$ 으로 표현된다. 여기서 γ 와 A 는 양의 상수로 물질의 고유 값이다. 이 비열식에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 자유전자 페르미 기체는 페르미-디랙(Fermi-Dirac) 분포를 따른다.[2.5점]

<보기>

- ㄱ. C 의 두번째 항(AT^3)은 격자 진동에 기인한다.
- ㄴ. 페르미 에너지가 커지면 γ 도 커진다.
- ㄷ. $\gamma = 6.5 \times 10^{-4} \text{ J/mol} \cdot \text{K}^2$ 이고 $A = 1.7 \times 10^{-4} \text{ J/mol} \cdot \text{K}^4$ 인 경우, 온도 범위 $0\text{K} < T \leq 1\text{K}$ 에서는 전자에 의한 비열이 격자 진동에 의한 비열보다 C 에 더 크게 기여한다.

(답) ㄱ, ㄷ

금속 열들의 실험값(experimental heat capacity of metals)

$T \ll \theta, T_F$ 인 매우 낮은 온도에서 금속의 열들이는

$$C = \gamma T + AT^3$$

◆ γT : 전자의 기여, AT^3 : 포논의 기여,

전자에 의한 열용량은 T 의 일차함수이며 충분히 낮은 온도에서 지배적이다.

전자에 의한 열용량

$$C_{el} = \frac{1}{3} \pi^2 D(\epsilon_F) k_B^2 T \quad (34)$$

$k_B T_F = \epsilon_F$ 인 자유전자 기체에서는

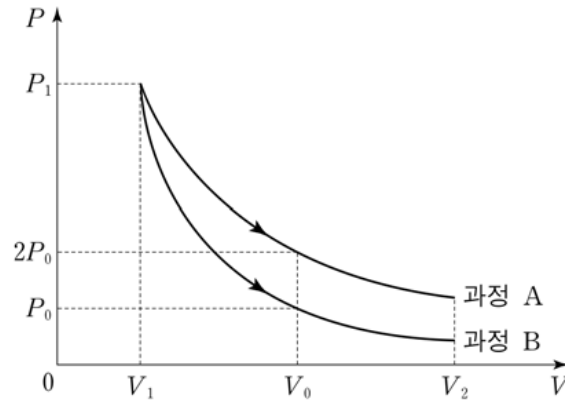
$$D(\epsilon_F) = 3N/2\epsilon_F = 3N/2k_B T_F$$

전자기체의 열용량

$$C_{el} = \frac{1}{2} \pi^2 N k_B T / T_F \quad (36)$$

◆ 페르미 에너지가 커지면 자유전자의 열용량에 대한 기여는 줄어든다.

28. 그림은 비열비가 $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ 인 같은 종류의 단원자 이상기체가 각각 1몰(mol)씩 들어 있는 두 실린더에 대해, 부피 V 에 따른 압력 P 를 나타낸 것이다. 기체의 부피가 V_1 일 때 압력은 P_1 로 서로 같고, 각 실린더의 기체는 과정 A 혹은 B를 통해 V_1 에서 V_2 로 증가한다. A와 B 중 하나는 단열과정이고 다른 하나는 등온과정이다. A, B에서 부피가 V_0 일 때, 압력은 각각 $2P_0, P_0$ 이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
<보기>

- ㄱ. A는 등온과정이다.
 ㄴ. B에서 기체의 내부에너지는 감소한다.
 ㄷ. V_0 에서 접선의 기울기의 크기는 B가 A의 $\frac{\gamma}{2}$ 배이다.

(답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

과정A(등온과정) :

$$pV = \text{일정}$$

$$d(pV) = Vdp + pdV = 0$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \quad : \text{등온과정의 기울기}$$

과정B(단열과정)

$$pV^\gamma = \text{일정}$$

$$d(pV^\gamma) = V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0$$

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} \quad : \text{단열과정의 기울기}$$

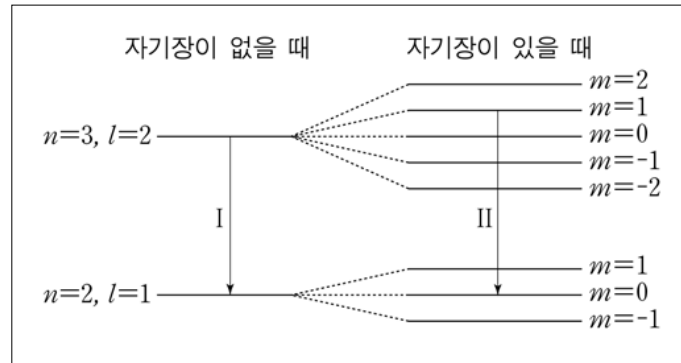
◆ 단열과정의 기울기는 등온과정의 기울기보다 절대값이 크다.

V_0 지점에서 기울기의 비교

$$\left| \frac{dp}{dV} \right|_{(\text{등온})} = \frac{p}{V} = \frac{2P_0}{V_0}$$

$$\left| \frac{dp}{dV} \right|_{(\text{단열})} = \gamma \frac{p}{V} = \gamma \frac{P_0}{V_0} = \frac{\gamma}{2} \frac{2P_0}{V_0} = \frac{\gamma}{2} \left| \frac{dp}{dV} \right|_{(\text{등온})}$$

39 그림은 원자의 상태 (n, l) 이 $(2, 1)$ 인 경우와 $(3, 2)$ 인 경우에, 외부 자기장이 없을 때의 에너지 준위와 외부 자기장이 있을 때의 에너지 준위들을 모식적으로 나타낸 것이다. I은 자기장이 없을 때의 전이이고, II는 자기장이 있을 때 선택규칙에 의해 허용되는 전이 중 하나이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, n, l, m 은 각각 전자의 주양자수, 궤도 양자수, 자기 양자수이고, 전자의 스핀은 고려하지 않는다. 선택규칙은 전기쌍극자에 의한 것만 고려한다.)

- ㄱ. 전자의 궤도운동으로 생기는 자기 모멘트와 외부 자기장과의 상호작용으로 $l \neq 0$ 인 에너지 준위들이 분리된다.
- ㄴ. $(l, m) = (2, 0)$ 에서 $(l, m) = (1, 0)$ 으로의 전이는 선택규칙에 의해 허용되지 않는다.
- ㄷ. 전이 I에 해당되는 한 개의 스펙트럼선이 외부 자기장에 의해 3개의 스펙트럼선으로 분리되어 나타난다.

(답) ㄱ, ㄷ

정상 Zeeman효과

<보충>

예제 9.3 스핀을 포함하는 수소의 Zeeman Spectrum

$n = 2$ 인 상태에 있는 수소원자의 스핀을 포함한 Zeeman spectrum을 그려보아라.

$$B = 1.0 \text{ T}$$

(풀이)

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} B (L_z + g S_z)$$

$$= \frac{e\hbar}{2m} B (m_l + g m_s)$$

$$\mu_B B = \hbar \omega_L$$

$$\begin{aligned} \mu_B B &= (9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T})(1.0 \text{ T}) \\ &= 9.27 \times 10^{-24} \text{ J} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV} \end{aligned}$$

$$E_2 = -(13.6 \text{ eV})/2^2 = -3.40 \text{ eV}$$

궤도 각운동량의 자기에너지에 대한 기여는

$$U_o = m_l \hbar \omega_L$$

$$E_2, E_2 \pm \hbar \omega_L$$

전자의 spin에 의한 자기에너지에 대한 기여

$$U_S = (gm_s)\hbar\omega_L$$

$n = 2$ 인 전자의 에너지 준위는

$$E_2, E_2 \pm \hbar\omega_L, E_2 \pm 2\hbar\omega_L$$

바닥상태는 spin에 의한 자기에너지의 기여로 인해

$$E_1 \pm \hbar\omega_L$$

전으로 방출되는 에너지는

$$\Delta E_{2,1}, \Delta E_{2,1} \pm \hbar\omega_L, \Delta E_{2,1} \pm 2\hbar\omega_L, \Delta E_{1,2} \pm 3\hbar\omega_L$$

$\Delta(m_l + m_s) = 0, \pm 1$: 선택률에 의해

$\omega_{2,1} \pm 3\omega_L$ 선은 나타나지 않는다.

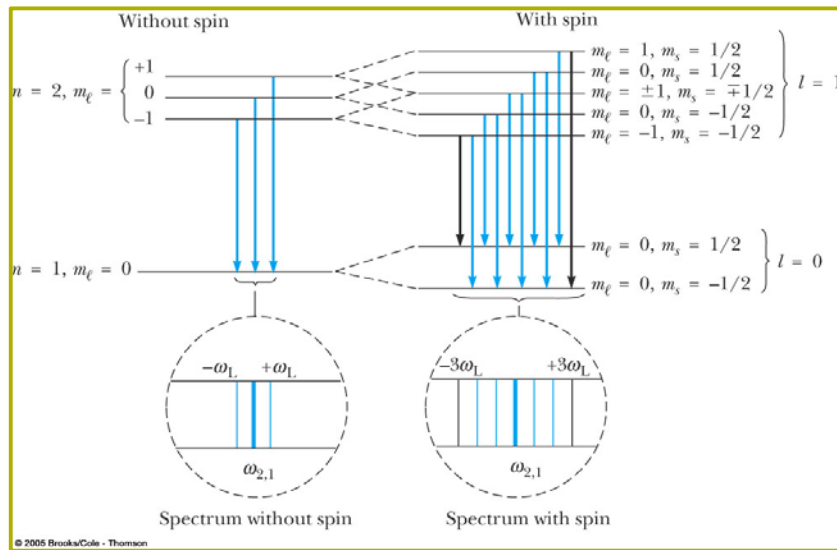


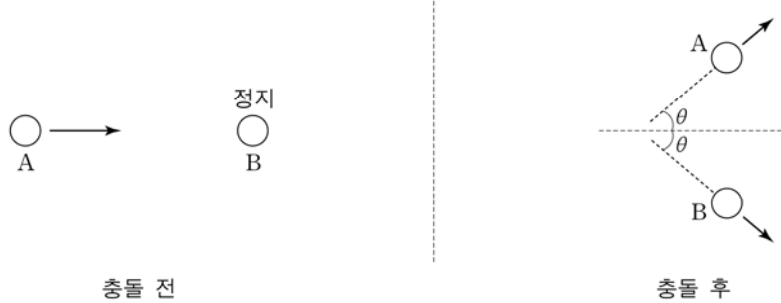
그림 9.9 전자스핀을 고려하였을 때 수소의 $n=2$ 상태로 들뜬 전자의 예상되는 Zeeman 형태와 원자전이.

Paschen-Back 효과

spin- 궤도 상호작용에 의한 에너지보다 Zeeman energy $\hbar\omega_L$ 이 훨씬 클 때(매우 강한 자기장에서) 그림(9.9)와 같이 나타나는 spectrum 갈라짐

2012년2차 1교시

<상황3> 그림과 같이 상대론적 총 에너지가 E_0 인 입자 A가 정지해 있던 입자 B와 탄성 충돌한 후, 각각 동일한 각 θ 로 산란되었다. A와 B의 정지 질량은 m 으로 동일하다.



1-2 <상황 3>에서 산란각 θ 의 표현식을 m , E_0 , 빛의 속력 c 로 나타내고, 이로부터 충돌 전 A의 속력이 c 보다 매우 작은 경우와 c 에 매우 가까운 경우로 나누어 산란각의 근사값을 구하시오. 또한 이를 통해 충돌 전 A의 속력에 따른 산란각의 변화에 대해 추론하시오.[10점]
[풀이]

$$\gamma_0 mc^2 + mc^2 = 2\gamma mc^2$$

$$\gamma_0 + 1 = 2\gamma$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\gamma_0 mv_0 = 2\gamma mv \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_0 mv_0}{2\gamma mv} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2} \cdot v_0}{2\sqrt{1-v_0^2/c^2} \cdot v}$$

1) $v_0 \ll c$ 인 경우

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv^2, \quad v_0^2 = 2v^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{2}v \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_0 mv_0}{2\gamma mv} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2} \cdot v_0}{2\sqrt{1-v_0^2/c^2} \cdot v} \approx \frac{v_0}{2v} \quad (2)$$

(2)을 (1)에 대입하여

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

2) $v_0 \sim c$ 인 경우 $\gamma_0 \simeq 2\gamma \gg 1$

$$\gamma_0 \sim 2\gamma$$

$$1 - v^2/c^2 \simeq 4(1 - v_0^2/c^2)$$

$$4v_0^2/c^2 - v^2/c^2 = 3 \rightarrow 4v_0^2 - v^2 = 3c^2 \rightarrow v^2 = 4v_0^2 - 3c^2$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_0 v_0}{2\gamma v} \simeq \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{4v_0^2 - 3c^2}} = \frac{v_0}{v_0 \sqrt{4 - 3c^2/v_0^2}} \simeq 1$$

$$\cos\theta \simeq 1 \rightarrow \theta \simeq 0^\circ$$

3) $v_0 \ll c$ 에서 $\theta = 45^\circ$ 로부터 속력이 증가함에 따라 점차 감소하여 $v_0 \sim c$ 인 영역으로 접근함에 따라 산란각은 $\theta = 0^\circ$ 로 수렴한다.

2011년1차

25. 수소원자의 $2p$ 상태에 있는 전자의 규격화된 파동함수가 구면 좌표계 (r, θ, ϕ) 에서

$$\psi_{211}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^5}} r e^{-r/2a_0} \sin\theta e^{i\phi}$$

로 주어진다. 이 상태에 있는 전자를 원자핵으로부터 거리 r 에서 발견할 지름확률밀도(radial probability density)가 최대가 되는 r 값은? (단, a_0 은 보어 반지름이다.) 2011년[1.5점]

(답) $4a_0$

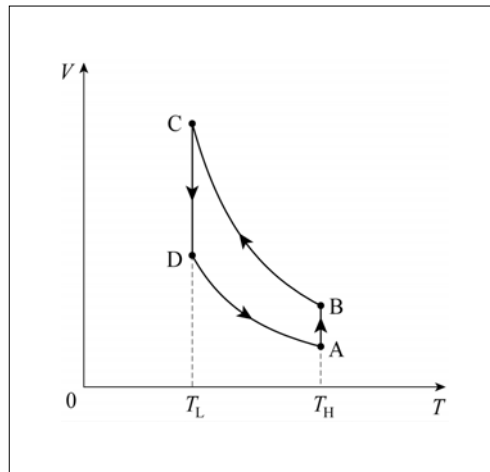
$$P_{211}(r) = 4\pi r^2 |\psi_{211}|^2 = Ar^4 e^{-r/a_0}$$

$$\frac{dP}{dr} = 4Ar^3 e^{-r/a_0} + Ar^4 (-1/a_0) e^{-r/a_0} = 0$$

$$r^3(4 - r/a_0) = 0$$

$$r = 4a_0$$

39. 그림은 이상적인 열기관에 사용된 단위자 분자 이상기체의 상태가 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 의 경로를 따라 변할 때, 기체의 부피와 절대온도의 관계를 나타낸 것이다. $A \rightarrow B$ 와 $C \rightarrow D$ 는 등온과정이고, $B \rightarrow C$ 와 $D \rightarrow A$ 는 단열과정이며, H 와 L 은 각각 고온 열원과 저온 열원의 절대온도이다.



이 열기관에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점]

<보 기>

- ㄱ. $A \rightarrow B$ 에서 증가한 기체의 엔트로피는 $C \rightarrow D$ 에서 감소한 기체의 엔트로피와 같다.
- ㄴ. 열기관의 효율은 $1 - \frac{T_L}{T_H}$ 이다.
- ㄷ. 이상기체가 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 에서 한 일은 $C \rightarrow D \rightarrow A$ 에서 외부로부터 받은 일과 같다.

(답) ㄱ, ㄴ

[풀이] Carnot cycle를 (VT-graph)로 그린 것.

40. 에너지가 E 인 광자의 상태밀도(density of states)는 $D(E) = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2$ 이다. V 는 광자가 차지한 공간(cavity)의 부피이다. 절대온도가 T 일 때 단위 부피 안의 광자의 수는? (단, h 는 플랑크상수, c 는 빛의 속력, k_B 는 볼츠만 상수이고, $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.4$ 이다.)

(답) $19.2\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3$

[풀이] 광자의 상태밀도 : $D(E) = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2$

에너지가 E 인 광자의 수 : $n(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$

단위부피 안의 광자의 수는

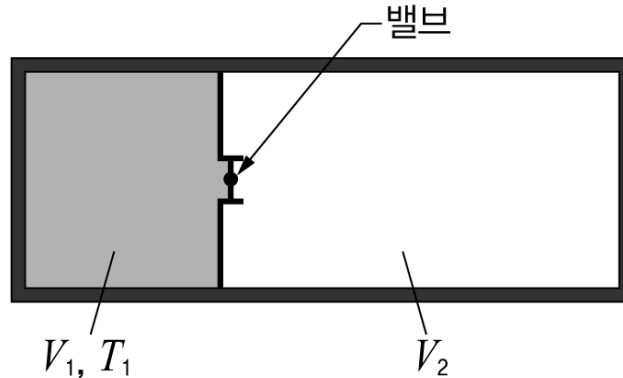
$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{V} \int_0^\infty D(E) n(E) dE = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty E^2 \cdot \frac{1}{e^{E/kT} - 1} dE = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \cdot 2.4 \\ &= 19.2\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{E}{kT}, \quad E^2 = x^2 k^2 T^2, \quad dE = kT dx$$

2011년2차 2교시

4. 다음은 자유팽창을 하는 기체의 온도 변화를 기술한 것이다.

그림은 내부 및 외부와 열적으로 고립된 단단한 용기에 단원자 분자로 이루어진 기체가 얇은 칸막이에 의해 왼쪽에 갇혀 있는 것을 나타낸 모식도이다. 왼쪽 기체의 부피와 온도는 각각 V_1 , T_1 이고, 분자의 수는 $N=nN_0$ (n 은 몰 수, N_0 는 아보가드로 수)이다. 오른쪽은 진공이고 부피는 V_2 이다. 밸브를 열면 기체가 자유팽창을 하게 되는데, 전체 계가 평형 상태에 도달하게 되면 기체의 온도는 T_3 가 된다.



이 자유팽창에서 기체의 내부에너지는 변화가 없으므로 $dE = TdS - pdV = 0$ 식을 만족한다. 엔트로피 변화는 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

$$dS = \frac{p}{T}dV \quad (1)$$

엔트로피의 변화를 온도와 부피로 나타내면 식(2)가 된다. 여기서 c_V 는 정적 몰비열이다.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV = \frac{nc_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \quad (2)$$

식 (1)과 (2)로부터 식 (3)을 얻는다.

$$dT = \frac{1}{nc_V} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \right] dV \quad (3)$$

기체의 상태 방정식을 알면 $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ 를 구하여 식 (3)을 적분함으로써 기체의 온도 변화 $\Delta T = T_3 - T_1$ 을 계산할 수 있다. 이 기체를 이상 기체, 반데르발스 기체, 기체 X라고 가정했을 때, 각각의 경우에 온도 변화를 구해 보면 아래 표와 같다. 표에서 $R = N_0 k$ 는 기체 상수, k 는 볼츠만 상수, a 와 b 는 상수이다. 온도 변화 과정 동안 c_V 는 변하지 않는다고 가정한다.

기체	상태 방정식	ΔT
이상 기체	$pV = nRT = NkT$	A
반데르발스 기체	$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn) = nRT = NkT$	B
기체 X	$\frac{p}{kT} = \frac{N}{V} \left[1 + \left(-\frac{a}{N_0^2 kT} + \frac{b}{N_0} \right) \frac{N}{V} \right]$	C

상수 a , b 의 물리적 의미와 기체 분자 사이의 퍼텐셜 에너지 그래프를 이용하여 $A = 0$ 이고 $B = C < 0$ 의 관계가 성립하는 이유를 설명하고, 반데르발스 기체의 상태 방정식과

기체 X 의 상태 방정식이 $\left(\frac{bn}{V}\right)^2$ 을 포함하는 항까지 같게 되는 조건을 구하고 그 조건의 의미를 설명하시오.[20점]

[풀이]

1) a, b 의 물리적 의미

a : 기체분자의 인력에 의한 측정 압력의 감소

b : 기체분자의 체적에 의한 실재 부피의 증가

2) 기체분자 사이에는 분자인력이 작용하는데 이 힘은 전기력이든 만유인력이든 역자승 인력이므로 분자간 퍼텐셜은

$$U = -\frac{k}{d}$$

자유팽창으로 분자간 거리가 커지므로 퍼텐셜은 증가한다. 따라서 운동에너지의 감소를 초래한다.

① 이상기체의 경우

상호작용이 없으므로 퍼텐셜의 변화가 없고 따라서 운동에너지의 변화도 없어 온도의 변화가 없다. 즉

$$A = 0$$

② 반데르발스 기체와 기체 X

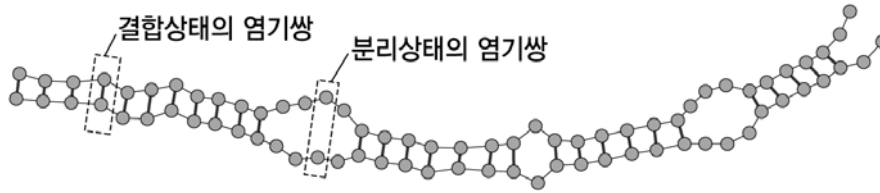
분자간 평균거리가 증가하므로 퍼텐셜이 증가하고 운동에너지가 감소한다. 즉 온도가 감소한다.

$$B = C < 0$$

③ $\left(\frac{bn}{V}\right)^2$ 을 포함하는 항까지 같게 되는 조건

2010년1교시

27. 그림과 같이 DNA는 같은 수의 염기가 일렬로 배열된 두 가닥의 사슬로 구성되며, 서로 다른 사슬에 있는 짝을 이루는 염기와 결합하여 결합상태의 염기쌍을 형성한다.



DNA 구조의 열적 안정성을 조사하기 위하여 다음과 같은 이상적인 모형을 생각하자.

[모형]

- 모든 염기는 오직 짝을 이루는 염기와 상호작용하며, 결합 상태와 분리 상태 중 하나의 상태만을 갖는다.
- 결합상태와 분리 상태의 염기쌍의 에너지는 각각 $-\epsilon, 0$ 이다.
- 염기의 운동에너지와 공간적 자유도에 의한 엔트로피는 무시한다.

이 모형을 이용하여 분석한 결과로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

(단, $\epsilon > 0$, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B 는 볼츠만 상수, T 는 절대온도이다.)

<보기>

- ㄱ. 온도 T 에서 염기쌍이 분리상태에 있을 확률은 $\frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}$ 이다.
- ㄴ. T 가 증가할 때, 염기쌍이 결합상태에 있을 확률은 감소한다.
- ㄷ. 온도 T 에서 염기쌍 하나의 평균 에너지는 $\frac{-\epsilon e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$ 이다.

(답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

염기쌍의 결합을 조화력에 의한 결합으로 본다.

염기쌍의 partition function은

$$Z = \sum e^{-\beta E_i} = e^{-\beta(-\epsilon)} + e^{-\beta(0)} = e^{\beta\epsilon} + 1$$

분리상태에 있을 확률은, $E=0$ 이므로

$$P(E=0) = \frac{e^{-\beta(0)}}{Z} = \frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

결합상태에 있을 확률은, $E=-\epsilon$ 이므로

$$P(-\epsilon) = \frac{e^{\beta\epsilon}}{Z} = \frac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

염기쌍 하나의 평균에너지 $\bar{E}$ 는

$$\bar{E} = \sum E_i P(E_i) = 0 \cdot P(0) + (-\epsilon) \cdot P(-\epsilon) = \frac{-\epsilon e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

28. 내부가 진공 상태인 밀폐된 금속 상자를 가열하면 상자의 내부 벽면으로부터 전자기파의 복사가 일어난다. 상자의 절대온도가 T 일 때, 상자 내부에 생성된 광자의 총 에너지는 T^4 에 비례한다. T 를 2 배로 증가시켰을 때, 광자의 총 엔트로피는 몇 배로 증가하는가? (단, 금속 상자의 부피 변화는 무시한다.)

(답) 8배

[풀이] 흑체복사

$$e_{total} = \int_0^\infty e_f df = \sigma T^4 : \text{Stefan-Boltzmann 법칙 (3.3)}$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4} : \text{Stefan-Boltzmann 상수}$$

→ 전체 방출률은 절대온도의 4승에 비례한다.

$$dQ = dE + pdV$$

$V = \text{const.}$ 이므로

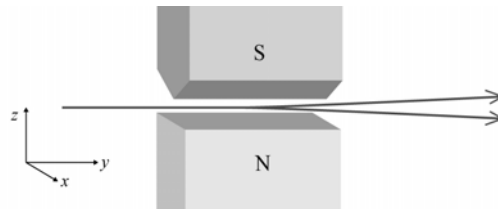
$$dQ = dE \rightarrow E = \sigma T^4$$

$$dQ = dE = 4\sigma T^3 dT$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = 4\sigma T^2 dT$$

$$\Delta S = \int_0^T 4\sigma T^2 dT = \frac{4}{3}\sigma T^3$$

31. 은(silver) 원자는 하나의 최외각 전자를 갖는다. 은 원자에 속해있는 전자들의 총 각운동량은 최외각 전자 하나의 스핀 각운동량과 같기 때문에, 그림과 같이 z 방향으로 불균일한 자기장에 y 방향으로 입사시킨 은 원자빔은 z 방향으로 두 갈래로 갈라졌다. 이 실험을 슈테른-게를라흐(Stern-Gerlach) 실험이라고 한다.



이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

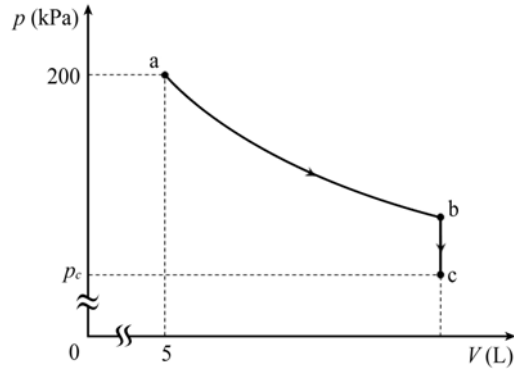
ㄱ. 자기장 속에서 은 원자의 스핀 각운동량의 방향은 항상 자기장의 방향과 같다.

ㄴ. 전자 한 개의 스핀 각운동량 양자수는 $\frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. 균일한 자기장에 은 원자 빔을 입사시켜도 은 원자 빔은 두 갈래로 갈라진다.

(답) ㄴ

36. 그림은 정적비열이 $1.5R$ (R 는 기체상수)인 1몰의 이상기체가 상태 a에서 b까지 등온팽창한 후, 일정한 부피에서 압력이 감소되어 압력 p_c 인 상태 c로 가는 과정을 나타낸 것이다. a에서 압력은 200 kPa이고, 부피는 5L이다. a에서 b까지 등온 팽창하는 동안 기체의 엔트로피는 $R \ln 2$ 만큼 증가하였다.



기체의 압력이 b에서 c까지 감소되는 동안 기체가 600 J의 열을 방출하였을 때, 압력 p_c 는? [2.5점]

(답) 60 kPa

[풀이]

등온과정의 엔트로피의 변화

$$\Delta S = R \ln \frac{V_b}{V_a} \quad \Delta S = R \ln 2 \text{ 이므로}$$

$$V_b = 2 V_a = 10 \ell = 10^{-2} \text{ m}^3$$

bc과정은 등적과정이므로

$$\begin{aligned} Q_{bc} = \Delta E &= c_V (T_b - T_c) = c_V \left(\frac{p_a V_a}{R} - \frac{p_c V_c}{R} \right) \\ &= 1.5R \cdot \frac{1}{R} (2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} - p_c \times 10^{-2}) \end{aligned}$$

$$Q_{bc} = 600 \text{ J}$$

$$1.5(10^3 - 0.02 p_c) = 600 \text{ J}$$

$$400 = 10^3 - p_c \cdot 10^{-2}$$

$$p_c = 600 \times 10^2 \text{ Pa} = 60 \text{ kPa}$$

2009년1차

35. 온도 T_1 인 계 A가 온도 T_2 인 열원(heat reservoir) B와 열 접촉하고 있으며, 이들은 외부로부터 고립되어 있다. 계 A는 열원 B로부터 열에너지를 흡수하여 압력은 일정하게 유지된 채로 온도가 T_2 로 상승하였다. 이 과정에서 열원 B의 엔트로피의 변화는? (단, R 은 기체상수, n 은 계 A의 몰 수이며, 계 A의 정압 몰비열 c_p 는 일정하다.)

(답) $nc_p \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$

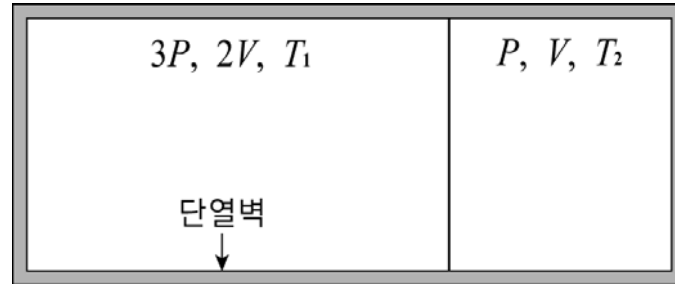
[풀이]

등압과정

$$nc_p (T_2 - T_1) = \Delta Q_A : \text{A계가 열원으로부터 흡수한 열}$$

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q_B}{T_2} = \frac{-\Delta Q_A}{T_2} = -nc_p (T_2 - T_1) / T_2 = nc_p \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$$

36. 그림은 열적으로 고립된 실린더 속에서 같은 종류의 기체가 얇은 벽으로 나누어진 것을 나타낸다. 초기에 왼쪽 부분의 압력, 부피, 온도는 각각 $3P, 2V, T_1$ 이고, 오른쪽은 P, V, T_2 이다.



기체 분자는 단원자분자이고 이상기체처럼 행동한다고 할 때, 얇은 벽을 제거한 후 평형 상태에 도달하였을 때 온도와 압력은?

(답) $\frac{7T_1T_2}{T_1+6T_2} \quad \frac{7}{3}P$

[풀이]

$$3p \cdot 2V = n_1RT_1 \quad (1)$$

$$pV = n_2RT_2 \quad (2)$$

$$p' \cdot 3V = (n_1 + n_2)RT' \quad (3)$$

$$n_1 = \frac{6pV}{RT_1} \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{pV}{RT_2} \quad (4)$$

$$n_1 + n_2 = \frac{pV}{R} \left(\frac{6}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{pV}{R} \left(\frac{T_1 + 6T_2}{T_1T_2} \right) \quad (5)$$

계의 내부에너지는 보존되므로

$$E_1 = 1.5n_1RT_1 \quad \text{and} \quad E_2 = 1.5n_2RT_2$$

$$E' = 1.5(n_1 + n_2)RT'$$

$E_1 + E_2 = E'$ 에 (4), (5)를 대입하여

$$E_1 + E_2 = 1.5 \times 6pV + 1.5 \times pV = 10.5pV$$

$$E' = 1.5 \frac{pV}{R} \left(\frac{T_1 + 6T_2}{T_1T_2} \right) RT' = 1.5pV \left(\frac{T_1 + 6T_2}{T_1T_2} \right) T'$$

$$1.5pV \left(\frac{T_1 + 6T_2}{T_1T_2} \right) T' = 10.5pV$$

$$T' = \frac{10.5}{1.5} \left(\frac{T_1T_2}{T_1 + 6T_2} \right) = \frac{7T_1T_2}{T_1 + 6T_2} \quad (6)$$

(6)을 (3)에 대입하여

$$p' = \frac{(n_1 + n_2)RT'}{3V} = \frac{1}{3V} \frac{pV}{R} \left(\frac{T_1 + 6T_2}{T_1T_2} \right) R \left(\frac{7T_1T_2}{T_1 + 6T_2} \right) = \frac{7}{3}P$$

37. 질량 m , 선운동량 p_x , 탄성계수 K 인 1차원 고전 단진자의 에너지는 $\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$ 으로 주어진다. 그리고 질량 M , 선운동량 $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$, 관성모멘트 I 인 3차원 고전 자유 이원자 분자의 운동에너지는 병진운동에너지와 회전운동에너지의 합 $\frac{1}{2M}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2I}\left(L_\theta^2 + \frac{L_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)$ 으로 주어진다. 여기서 L_θ 와 L_ϕ 는 각각 각운동량의 θ 성분과 ϕ 성분이다. 상온의 절대온도 T 에서 이들 분자 한 개의 평균 운동에너지를 옳게 짚지은 것은? (단, k_B 는 볼츠만 상수이다.)

(답) 1차원 고전 단진자 : $k_B T$ 3차원 고전 이원자 분자 : $\frac{5}{2}k_B T$

[풀이] 균등분배 원리 : 에너지에 대한 하나의 자승 항(혹은 자유도)에 $\frac{1}{2}k_B T$ 씩의 에너지가 분배된다.

1차원 고전 단진자 : 2개의 자승 항 $\rightarrow u = k_B T$

3차원 고전 이원자 분자 : 5개의 자승 항 $\rightarrow u = \frac{5}{2}k_B T$

2008년

17. 압력 P , 부피 V , 온도 T 인 n 몰의 반데르발스 기체는 다음과 같은 상태방정식을 만족한다.

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

여기서 a, b, R 은 모두 상수이다. 온도 T 인 이 기체 n 몰이 부피 V_1 에서 V_2 로 등온 팽창하는 동안 기체가 외부에 한 일 W 를 구하시오.[3점]

[풀이 과정과 답]

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{V - nb}\right) \left[nRT - \frac{n^2 a}{V^2}(V - nb)\right] = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \\ W &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT}{V - nb}\right) dV - \int_{V_1}^{V_2} \frac{n^2 a}{V^2} dV \\ &= nRT \ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) + n^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \\ &= nRT \ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) - \frac{n^2 a (V_2 - V_1)}{V_1 V_2} \end{aligned}$$

19. 일차원상에 N 개의 분자가 배열되어 있는 온도가 T 인 계에서, 각 분자들은 분자 사이의 탄성력에 의해 일정한 각진동수 ω 로 진동하고 있다. 분자의 진동에너지는 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ 이고, $n = 0, 1, 2, \dots$ 이다. 이 분자들의 진동에 의한 계의 분배함수 Z 와 평균에너지 $\bar{E}$ 를 구하시오.[4점]

[풀이과정과 답]

● 계의 분배함수 Z :

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta\hbar\omega}$$

$$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} (1 + e^{-\beta\hbar\omega} + e^{-2\beta\hbar\omega} + \dots) = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

● 계의 평균에너지 $\bar{E}$

$$\ln Z = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)$$

※ 조화진동자

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} E_n}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \quad (7.6.8)$$

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta\hbar\omega}$$

$$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} (1 + e^{-\beta\hbar\omega} + e^{-2\beta\hbar\omega} + \dots) = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})$$

(7.6.8)에 의해

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right) \quad (7.6.12)$$

$\beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$ 인 경우

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(1 + \beta\hbar\omega + \dots) - 1} \right] \approx \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega} \right] \\ &\approx \hbar\omega \left[\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right] \quad \text{by virtue of (7.6.5)} \end{aligned}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{\beta} = kT \quad (7.6.14)$$

◆ 고전적 결과를 만족

$$\beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1 \text{인 경우}$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + e^{-\beta\hbar\omega} \right) \simeq \frac{1}{2}\hbar\omega \quad ; \text{바닥상태}$$

2007년

10. 세 개의 축퇴되지 않은 에너지 고유치 $-\mu B, 0, +\mu B$ 만을 가질 수 있는 스핀 1인 입자가 절대온도 T 인 열원과 열적 평형 상태에 있다. 이 입자의 분배함수와 평균에너지를 구하시오. (단, Boltzmann 상수는 k 임.) [3점]

$$\text{· 분배함수 } Z = e^{-\frac{\mu B}{kT}} + e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1$$

$$\text{· 평균에너지 } \bar{E} = \frac{\mu B e^{-\frac{\mu B}{kT}} - \mu B e^{\frac{\mu B}{kT}}}{Z} = \frac{\mu B e^{-\frac{\mu B}{kT}} - \mu B e^{\frac{\mu B}{kT}}}{\left(e^{-\frac{\mu B}{kT}} + e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 \right)}$$

☞ 분포함수와 분배함수

$$f(E_i) = C e^{-E_i/kT} : \text{분포함수(distribution function)}$$

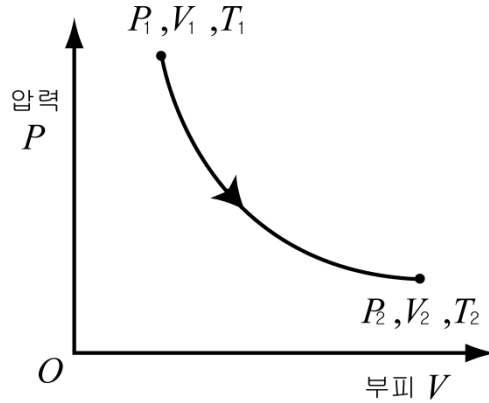
$$\sum_i f_i(E_i) = \sum_i C e^{-E_i/kT} = C \sum_i (e^{-E_i/kT}) = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{\sum_i e^{-E_i/kT}} = \frac{1}{Z} : \text{정규화 상수(normalization function)}$$

$$Z = \sum_i e^{-E_i/kT} : \text{분배함수(partition function)}$$

$$\bar{E} = \frac{\sum E_i f(E_i)}{Z} : \text{평균에너지}$$

24. 그림은 n 몰의 단원자 이상기체를 이용한 열기관의 작동 과정 일부를 나타내는 압력-부피 그래프이다. 압력, 부피, 절대온도가 각각 P_1, V_1, T_1 인 처음 상태에서 P_2, V_2, T_2 인 상태로 부피가 늘어나는 동안 이 기체는 $PV^2 = K$ (K 는 상수)를 만족한다. 이 과정에서 기체가 외부에 한 일 W , 방출한 열, 엔트로피 변화 ΔS 를 T_1, T_2 의 함수로 구하시오. (단 기체상수는 R 임). [3점]



● W :

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{K}{V^2} dV = -K \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \\ &= \frac{P_1 V_1^2}{V_1} - \frac{P_2 V_2^2}{V_2} = P_1 V_1 - P_2 V_2 = nR(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

◆ $T_1 > T_2$

● 방출한 열 :

$$Q = \Delta E + W = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + nR(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1)$$

◆ $Q < 0$

● ΔS :

$V_1 \rightarrow V_2$ 등온과정을 거친 후 $V_2 = \text{const.}$ $T_1 \rightarrow T_2$ 등적과정으로 가역과정의 설정하여 엔트로피를 구한다.

등적과정

$$\Delta S_{\text{등온}} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dE + PdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot \frac{1}{T} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$K = (P_1 V_1) V_1 = nRT_1 V_1 \quad \text{and} \quad K = (P_2 V_2) V_2 = nRT_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{K}{nRT_1} \quad \text{and} \quad V_2 = \frac{K}{nRT_2}$$

$$\Delta S_{\text{등온}} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{(3/2)nRdT}{T} = nR \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{3}{2}nR \ln \frac{T_2}{T_1}$$

2006년

20 부피 V 인 용기 속에 질량 m 인 같은 종류의 이상기체 분자 N 개가 들어 있다. 기체 분자의 절대온도가 T 일 때, 이 계의 분배함수는

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3N/2} V^N$$

으로 주어진다. 여기서 k_B 는 볼츠만 상수, h 는 플랑크 상수이다. 주어진 분배함수를 이용하여 기 계의 평균에너지와 상태방정식을 계산하시오. [3점]

●평균 에너지

$$\ln Z = N \left[\ln V - \frac{3}{2} \ln \beta + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right) - \ln N + 1 \right]$$

$$\bar{E} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} N k T = N \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k T$$

●상태방정식

$$\bar{p} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N}{\beta} \frac{1}{V} = \frac{N k T}{V} \quad \text{혹은} \quad \bar{p} V = N k T \quad ; \quad \text{상태방정식}$$

이상기체

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3N/2} V^N$$

$$\ln Z = N \left[\ln V - \frac{3}{2} \ln \beta + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right) - \ln N + 1 \right] \quad (7.2.7)$$

열역학적 물리량

$$\bar{E} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \bar{p} = \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$$

$$\bar{E} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} N k T = N \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k T$$

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{3}{2} N k = \frac{3}{2} n N_A k = \frac{3}{2} n R \quad ; \quad \text{열용량}$$

$$c_V = \frac{3}{2} R \quad ; \quad \text{몰비열}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N}{\beta} \frac{1}{V} = \frac{N k T}{V} \quad \text{혹은} \quad \bar{p} V = N k T \quad ; \quad \text{상태방정식}$$

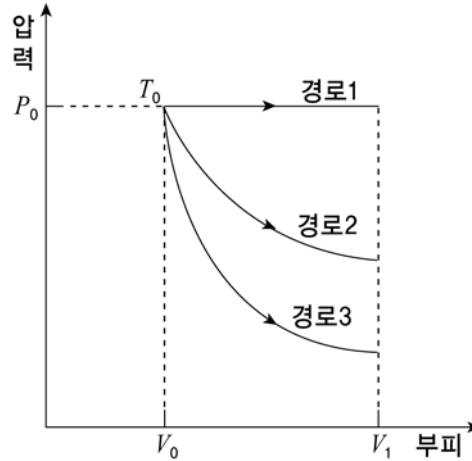
$$\text{구분 불가능하면} \quad ; \quad Z = \frac{\zeta^N}{N!}$$

$$\ln Z = N \ln \zeta - \ln N!$$

$$\ln Z = N \ln \zeta - N \ln N + N$$

2005년

11. 그림은 1몰의 단원자 분자로 이루어진 이상기체가 처음 상태 (P_0, V_0, T_0) 에서 각각 등압과정 (경로 1), 등온과정 (경로2), 단열과정 (경로3)을 거쳐서 부피가 V_1 으로 팽창되는 과정을 나타낸 것이다. 각 경로에서, 부피가 V_1 일 때의 온도 T_1, T_2, T_3 와 이상기체가 한 일 W_1, W_2, W_3 을 구하여 아래 표를 완성하시오. (3점)



	온 도	일
경로1	$T_1 = \left(\frac{P_0 V_1}{R}\right)$	$W_1 = P_0(V_1 - V_0)$
경로2	$T_2 = T_0$	$W_2 = RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$
경로3	$T_3 = \left(\frac{1}{R} P_0 V_1^{1-\gamma} V_0\right)$	$W_3 = \frac{3}{2} P_0 V_0 \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{2/3}\right]$

$\gamma = \frac{5}{3}$: 단원자 이상기체의 비열비

(풀이)

$$1) P_0 V_0 = RT_0, P_0 V_1 = RT_1$$

$$T_1 = \frac{P_0 V_1}{R}$$

$$2) W = \int_{V_0}^{V_1} P dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$$

$$= RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$$

$$3) P_0 V_0^\gamma = P_3 V_1^\gamma \rightarrow P_3 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma$$

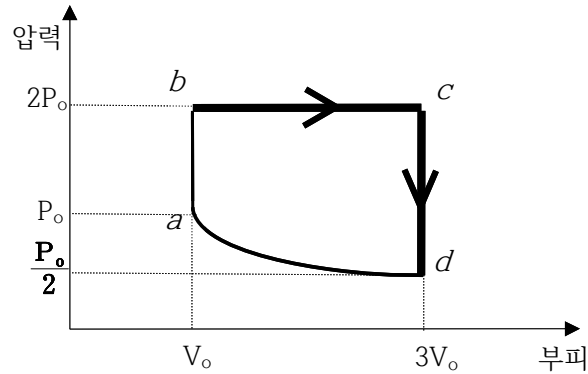
$$P_3 V_1 = RT_3$$

$$\rightarrow T_3 = \frac{P_3 V_1}{R} = \frac{V_1}{R} \cdot P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma$$

$$= \frac{P_0}{R} V_1^{1-\gamma} V_0^\gamma$$

2004년

18. 단원자 이상기체 1몰이 그림과 같은 순환과정을 거친다. $b \rightarrow c$ 와 $c \rightarrow d$ 경로에서 한 일과 유입 또는 방출되는 열을 각각 V_0 와 P_0 로 나타내시오. [3점]



$b \rightarrow c$ 과정 일 : $4P_0 V_0$

열 : $10P_0 V_0$

$c \rightarrow d$ 과정 일 : 0

열 : $-\frac{27}{4}P_0 V_0$

(풀이)

단원자 기체 1몰

$b \rightarrow c$: 등압과정

$$dQ = du + PdV : \rightarrow Q = \Delta u + W$$

$$W = \int_b^c PdV = 2P_0(3V_0 - V_0) = 4P_0 V_0$$

$$2P_0 V_0 = RT_b \quad : b \text{ 지점}$$

$$2P_0 3V_0 = RT_c \quad : c \text{ 지점}$$

$$\Delta u = u_c - u_b = \frac{3}{2}RT_c - \frac{3}{2}RT_b = \frac{3}{2}R\left(\frac{6P_0 V_0}{R} - \frac{2P_0 V_0}{R}\right) = 6P_0 V_0$$

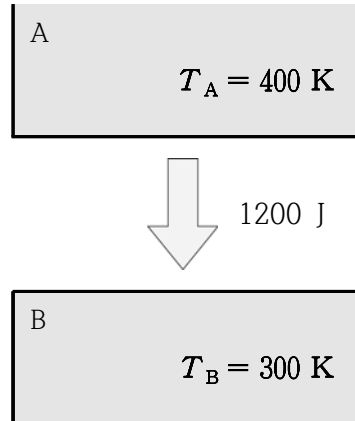
$$\therefore Q = \Delta u + W = 6P_0 V_0 + 4P_0 V_0 = 10P_0 V_0$$

$$c \rightarrow d : \text{등적과정 } dV = 0, \quad W = \int_c^d PdV = 0$$

$$Q = \Delta u = \frac{3}{2}R(T_d - T_c) = \frac{3}{2}R\left(\frac{3P_0 V_0}{R} - \frac{6P_0 V_0}{R}\right) = -\frac{27}{4}P_0 V_0$$

2003년

9. 그림과 같이 온도 $T_A = 400\text{K}$ 인 열원 A에서 온도 $T_B = 300\text{K}$ 인 열원 B로 1200J의 열이 이동하였다. 각 열원의 온도는 변화가 없다. (총 4점)



9-1. 열원 A와 열원 B의 엔트로피 변화 ΔS_A 와 ΔS_B 를 각각 구하시오. (2점)

$$\Delta S_A = \frac{Q_A}{T_A} = \frac{-1200\text{J}}{400\text{K}} = -3(\text{J/K})$$

$$\Delta S_B = \frac{1200\text{J}}{300\text{K}} = 4\text{J/K}$$

9-2. 위 9-1의 결과를 이용하여 열역학 제2법칙을 설명하시오. (2점)

$$\Delta S_T = \Delta S_A + \Delta S_B = 1\text{J/K}$$

열역학 제2법칙 : A와 B로 구성된 계의 자연과정에서 엔트로피는 증가한다.

11. 분자 수 N , 부피 V 인 이상기체의 양자 상태수(배열방법의 수) Ω 는

$\Omega(E, V, N) = f(N) V^N E^{3N/2}$ 으로 주어진다. 여기서 $f(N)$ 은 N 의 함수이며, E 는 내부에너지이다. (총 3점)

11-1. 기체의 엔트로피를 구하시오. (1점)

$$S = k_B \ln \Omega = k_B (\ln f(N) + N \ln V + \frac{3N}{2} \ln E)$$

11-2. 기체의 내부에너지 E 를 온도의 함수로 구하시오. (1점)

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \frac{3N}{2} \frac{1}{E}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad \text{이므로}$$

$$E = \frac{3}{2} N k T$$

11-3. 위의 이상기체 분자 N 개를 이원자 분자 N 개로

대체하였을 경우, 양자 상태수 Ω 는 어떻게 수정되

는지 쓰시오. 이 때, 기체의 온도는 수백 K이어서 진동자유도는 고려하지 않는다. (1점)

$$\Omega(E, V, N) = f(N) V^N E^{5N/2}$$

⊙ 단원자 이상기체

$$E_{\text{int}} = 0$$

$$E = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} = \sum_i^N \frac{1}{2m} \sum_{\alpha}^3 p_{i\alpha}^2 \quad (2.5.16)$$

$$\vec{p}_i^2 = p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + p_{i3}^2$$

☞ $f = 3N$ 개의 제곱 항

☞ 운동량공간의 $3N(=f)$ 차원에서 반지름

$$R = [2mE]^{\frac{1}{2}} \text{인 구}$$

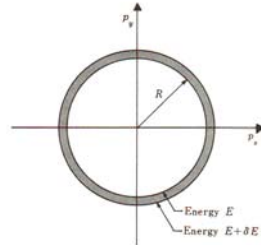
차원 f 일 때 구의 부피 $\propto R^f$

$$\Phi(E) \sim R^f = R^{3N} \sim E^{\frac{3}{2}N}$$

$$\Omega(E) = \frac{\partial \Phi}{\partial E} \delta E \propto E^{\frac{3}{2}N-1} \quad (\sim E^{\frac{3}{2}N} : N \text{이 매우 클 때})$$

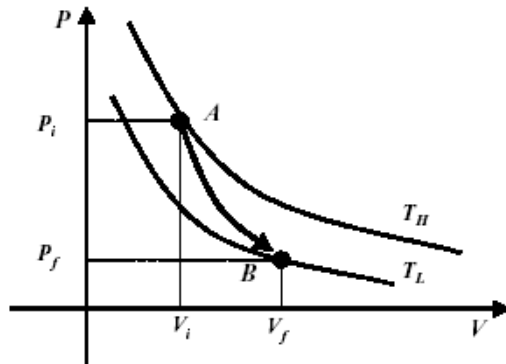
$$\rightarrow \Omega(E) = BV^N E^{\frac{3}{2}N} \quad (B : \text{임의의 상수})$$

☞ N 은 Avogadro의 차수이므로 $\Omega(E)$ 는 에너지의 증가에 따라 극도로 급히 증가한다.



2002년

16. 그림은 1몰의 단원자 이상기체로 작동하는 카르노 기관의 압력(P)-부피(V) 그래프이다. 기체는 단열 팽창과정을 거쳐 상태 A (온도 T_H , 압력 P_i , 부피 V_i)에서 상태 B (온도 T_L , 압력 P_f , 부피 V_f)로 된다. 기체상수는 R, 내부 에너지는 E로 표시하라. (총 3점)



16-1. 단열 과정($dQ=0$)에서 열역학 제 1법칙과 단원자 기체 1몰의 상태방정식을 수식으로 표현하시오. (1점)

$$du + P dV = 0 : \text{열역학 제1법칙}$$

$$PV = RT : \text{기체 1몰의 상태방정식}$$

16-2. 위의 그림에서 상태 A에서 상태 B로 단열 팽창하는 동안 1몰의 기체가 한 일을 온도 T_H, T_L 로 구하시오. (1점)

$$\begin{aligned}
 W &= -\Delta u = u_A - u_B \\
 &= \frac{3}{2}RT_H - \frac{3}{2}RT_L = \frac{3}{2}R(T_H - T_L)
 \end{aligned}$$

(답) $W = \frac{3}{2}R(T_H - T_L)$

16-3. 문항 16-1의 결과를 이용하여 $P_i V_i^{\frac{5}{3}} = P_f V_f^{\frac{5}{3}}$ 임을 증명하시오. (1점)

$$u = \frac{3}{2}RT \quad du = \frac{3}{2}RdT$$

$$PdV = \frac{RT}{V}dV$$

$$du + PdV = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V} \text{ 적분하면}$$

$$\ln T = -\frac{2}{3}\ln V + C$$

$$\ln TV^{\frac{2}{3}} = C \quad \therefore TV^{\frac{2}{3}} = C \quad \bullet \bullet *$$

$$PV = RT \rightarrow T = \frac{PV}{R} \text{을 } * \text{에 대입}$$

$$TV^{\frac{2}{3}} = \frac{PV}{R}V^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{R}PV^{\frac{5}{3}} = C$$

$$\text{즉, } PV^{\frac{5}{3}} = \text{일정}$$

$$\text{or } P_i V_i^{\frac{5}{3}} = P_f V_f^{\frac{5}{3}}$$

문제의 난이도 혹은 요구하는 노동에 비해 점수가 너무 낮다.

17. 에너지가 $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$ 로 주어지는 한 개의 서형 조화 진동자로 이루어진 계를 고려하자. 이 계의 에너지가 ϵ_n 인, n 상태에 있을 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$P_n = Ce^{-\beta\epsilon_n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots, \beta = \frac{1}{k_B T}$$

여기서 C 는 상수이다. (총 3점)

17-1. 바닥 상태($n=0$)에 있을 확률 P_0 와 첫 번째 들뜬 상태($n=1$)에 있을 확률 P_1 의 비($\frac{P_1}{P_0}$)를 구하시오. (2점)
(풀이)

$$\begin{aligned} P(E) &= Ce^{-E/k_B T} \text{이므로} \\ P_0 &= Ce^{-(1/2)\hbar\omega_0/k_B T} \quad \text{and} \quad P_1 = Ce^{-(3/2)\hbar\omega_0/k_B T} \\ \frac{P_1}{P_0} &= \frac{Ce^{-(3/2)\hbar\omega_0/k_B T}}{Ce^{-(1/2)\hbar\omega_0/k_B T}} = e^{-\hbar\omega_0/k_B T} \end{aligned}$$

17-2. 극저온($k_B T \ll \hbar\omega_0$)에서 선형 조화 진동자는 어떤 에너지 상태에 있겠는가? 문항 17-1의 결과를 이용하여 답하시오. (1점)
(풀이)

$$\frac{P_n}{P_0} \sim 0 \quad \text{when } n \neq 0 \text{이므로}$$

조화 진동자는 바닥상태 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ 에 있다.

2001년

14. 아인슈타인 모델을 이용하여 계산한 고체의 정적비열은

$$c_V = 3N_A k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2}$$

으로 주어진다. 고온일때와 저온일 때의 비열을 각각 구하고, 각 경우의 열적 특징을 쓰시오.

(참조 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$) (총 6점 : 풀이 2점, 답 4점)

1) $\hbar\omega \gg k_B T$: 저온

$$c_V \simeq 3N_A k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\hbar\omega/k_B T} \rightarrow 0$$

2) $\hbar\omega \ll k_B T$: 고온

$$\begin{aligned} \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} &\simeq \frac{1}{(1 + \hbar\omega/k_B T - 1)^2} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 \\ c_V &\simeq 3N_A k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 = 3N_A k_B = 3R \end{aligned}$$

특징: 1) 저온 $T \rightarrow 0$ $c_V \rightarrow 0$ 미소량의 열 유입으로 급격한 온도의 상승

2) 고온 $T \rightarrow \infty$, $c_V \rightarrow 3R$ 열 유입량에 비례하여 온도가 상승한다. ($\Delta Q = c_V \Delta T$)

※Einstein model c_V 의 증명

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad : \text{평균입자수}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad : \text{진동자당 평균에너지}$$

고체 1몰 원자의 내부에너지(진동에너지)는

$$U = 3N_A \bar{\epsilon} = 3N_A \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

정적비열은

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A \hbar\omega \frac{-e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \left(\frac{\hbar\omega}{k} \right) \left(\frac{-1}{T^2} \right) = 3N_A k \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}$$

2000년

14. 질량 m , 입자수 N , 평균속도 v 인 이상기체가 한 변의 길이 L 인 정육면체 모양의 밀폐된 상자 속에 들어 있다. 다음 물음에 답하시오. (총5점)

14-1. 이 기체가 상자 면에 미치는 압력 P 와 기체의 평균 운동에너지 E 는 절대온도 T 에 비례함을 보이시오. (3점)

기체 상태 방정식 $pV = nRT = \left(\frac{N}{N_A}\right)RT \quad \therefore p \propto T$

기체 분자의 평균 운동에너지 $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT \quad \therefore \overline{E_k} \propto T$

※ 문제의 배점으로 보아 $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$ 를 유도함이 타당할것 같다.

속도 v_x 인 기체가 오른쪽 벽면을 한번 충돌하여 얻게 되는 운동량의 변화는 $2mv_x$

1초당의 운동량의 변화 $2mv_x \frac{v_x}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}$

N 개의 분자가 1면에 미치는 힘

$$F = N \frac{m}{L} \left(\frac{v_{rms}^2}{3} \right)$$

$$P = \frac{F}{A} = N \frac{1}{L^3} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} m v_{rms}^2 \right) = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \overline{E_k}$$

$$PV = N \frac{2}{3} \overline{E_k} = n N_A \frac{2}{3} \overline{E_k} \dots \dots \star$$

이상기체 상태방정식

$$PV = nRT \dots \dots \star$$

☆와★에서

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT$$

14-2. 이 기체의 부피를 2배로자유 팽창시킬 때, 엔트로피의 변화 ΔS 를 구하시오. (2점)

이 자유팽창에서는 기체의 온도는 불변

등온과정으로 $V \rightarrow 2V$ 로 팽창할 때의 엔트로피의 변화를 계산한다.

$$dQ = dU + p dV \quad dU = 0 (\text{등온과정})$$

$$dQ = p dV$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_V^{2V} \frac{p}{T} dV$$

$$= \int_V^{2V} \frac{nRT}{TV} dV = nR \ln \left(\frac{2V}{V} \right) = nR \ln 2 = \frac{N}{N_A} R \ln 2$$

$$= N \frac{R}{N_A} \ln 2 = Nk \ln 2$$

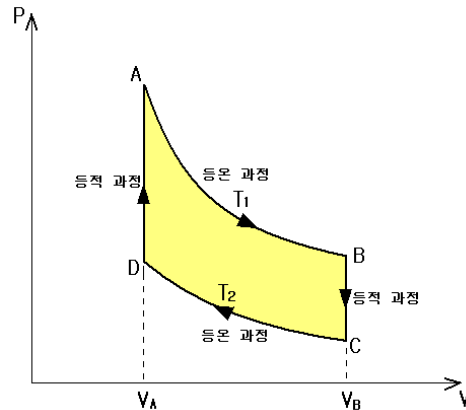
답) $\Delta S = Nk \ln 2$, 엔트로피의 증가

1999년-1

16번

그림과 같이 4개의 과정을 가지는 열기관에 1몰의 단원자 이상기체를 넣고 화살표 방향으로 과정이 순환되도록 열기관을 작동시켰다.

A점에서의 기체의 체적은 V_A 이었고, B점에서의 체적은 V_B 이었다. 기체 상수 R , 고온 열원의 온도 T_1 , 저온 열원의 온도 T_2 , V_A , V_B 를 써서 다음 문제를 풀어라.



(1) A→B의 등온 팽창 과정에서 열기관이 흡수한 열량 Q_{AB} 를 계산하라. (2점)

♣요령 및 힌트♣

$$Q = \Delta u + W ; \text{열역학 제 1법칙}$$

Q : 계에 유입된 열, Δu : 내부 에너지의 변화, W : 계가 (외부에)한 일

♣풀이♣

$$\Delta u = 0 (\because \text{이상기체의 내부에너지로 온도의 함수, } u = \frac{3}{2}RT)$$

$$Q_{AB} = \int_{V_B}^{V_A} P dV = \int_{V_B}^{V_A} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$(\text{답}) Q_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

(2) 이 열기관의 열효율 ϵ 을 구하라. (2점)

♣요령 및 힌트♣

열기관의 열 효율 ϵ

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H}$$

(Q_H : 1 cycle 당 고온 열원으로부터 유입된 열, W : 1 cycle 당 외부에 한 일)

1 cycle 당 계의 내부에너지의 변화는 없으므로

$$Q_{\text{net}} = W$$

$$Q_{\text{net}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$Q_H = Q_{AB} + Q_{DA} \text{ (} T_1 \text{ 열원으로부터 유입된 열)}$$

♣풀이♣

$$Q_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} = -RT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_{BC} = \Delta u_{BC} = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) = -\frac{3}{2} R(T_1 - T_2) \text{ 계 외부로 열의 유출}$$

$$Q_{DA} = \Delta u_{DA} = \frac{3}{2} R(T_1 - T_2)$$

$$\therefore Q_{net} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A} = W$$

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A}}{RT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + \frac{3}{2} R(T_1 - T_2)}$$

$$(\text{답}) \epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A}}{RT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + \frac{3}{2} R(T_1 - T_2)}$$

1999년-2

15. 2원자 분자로 된 1몰의 이상기체가 상자에 들어 있다. 정압비열을 c_V , 정적비열을 c_p , R 을 기체상수라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (총 3점)

(1) $c_p = c_V + R$ 임을 증명하시오. (2점)

♣풀이♣

$dQ = dU + p dV$: 열역학 제1법칙

정적과정 $dV = 0$ 이므로 $dQ = dU$

$$U = U_{\text{병진}} + U_{\text{회전}} = \frac{3}{2} RT + \frac{2}{2} RT = \frac{5}{2} RT$$

$$c_V dT = d\left(\frac{5}{2} RT\right) = \frac{5}{2} R dT$$

$$\therefore c_V = \frac{5}{2} R$$

정압과정 $dQ = dU + p dV$

$$pV = RT \rightarrow p dV = R dT$$

$$c_p dT = c_V dT + R dT$$

$$c_p = c_V + R$$

$$(\text{답}) c_p = c_V + R$$

(2) 이 기체의 내부에너지 $U = \frac{5RT}{2}$ 임을 설명하시오. (1점)

♣풀이♣ 기체분자의 평균 에너지 = 자유도 당 평균에너지 $\times$ 자유도

$$\text{자유도당 평균 에너지} = \frac{1}{2}kT$$

$$\text{이원자분자의 자유도} = 3(\text{병진}) + 2(\text{회전}) = 5$$

$$\overline{E_k} = \frac{5}{2}kT$$

$$U = N_A \cdot \overline{E_k} = \frac{5}{2}N_A kT = \frac{5}{2}RT$$

1998년

16. N개의 입자가 $E_1=0$, $E_2=kT$, $E_3=2kT$ 의 세 에너지 상태로 분포되어 있다.

(1) 볼츠만 분포 함수를 이용하여 세 에너지 상태에서의 입자수 비를 구하시오. (1점)

(2) 평형 상태에서의 총 에너지를 구하시오($N=N_1+N_2+N_3$ 을 참조하시오). (2점)

(풀이)

(1) 입자수의 비

$$\overline{n_s} = N \frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$$

$$\sum_r e^{-\beta\epsilon_r} = e^{-0} + e^{-1} + e^{-2} = 1 + e^{-1} + e^{-2}$$

$$\overline{n_1} = \frac{Ne^{-\beta 0}}{1 + e^{-1} + e^{-2}} = \frac{N}{1 + e^{-1} + e^{-2}}$$

$$\overline{n_2} = \frac{Ne^{-\beta kT}}{1 + e^{-1} + e^{-2}} = \frac{Ne^{-1}}{1 + e^{-1} + e^{-2}}$$

$$\overline{n_3} = \frac{Ne^{-2\beta kT}}{1 + e^{-1} + e^{-2}} = \frac{Ne^{-2}}{1 + e^{-1} + e^{-2}}$$

따라서 입자수의 비는

$$\overline{n_1} : \overline{n_2} : \overline{n_3} = 1 : e^{-1} : e^{-2}$$

(2) 평형상태의 총 에너지

$$E_{tot} = \overline{n_1}E_1 + \overline{n_2}E_2 + \overline{n_3}E_3 = \frac{N}{1 + e^{-1} + e^{-2}}(0 + kTe^{-1} + 2kTe^{-2})$$

$$E_{tot} = \frac{NkT(e^{-1} + 2e^{-2})}{1 + e^{-1} + e^{-2}} = 0.42NkT$$

Maxwell-Boltzmann 통계

Maxwell-Boltzmann 통계의 엄격한 고전 경우

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}$$

☞ 모든 상태 R 에 대해 summation

☞ 입자들은 구별가능 ; $\{n_1, n_2, \dots\}$ 의 가능한 배열 방법의 수

$$\star \frac{N!}{n_1!n_2!\dots}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1!n_2!\dots} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots)}$$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} (e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} (e^{-\beta \epsilon_2})^{n_2} \dots$$

☞ 다항식의 전개 결과

$$Z = (e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + \dots)^N$$

$$\blacktriangleright \ln Z = N \ln \left(\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \right) \quad (9.4.4)$$

따라서

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} N \frac{-\beta e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}$$

$$\blacktriangleright \bar{n}_s = N \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}} \quad (9.4.7)$$

☞ Maxwell-Boltzmann 분포

1997년

22. 질량 2kg, 606°C의 알루미늄이 얼마의 시간이 흐른 후 20°C로 냉각되었다. 이때 알루미늄의 엔트로피 변화량을 구하시오. 알루미늄의 비열 $c = 901 \text{ J/kgK}$ 이며 $\ln 2 = 0.693$, $\ln 3 = 1.099$ 이다. (2점)

[풀이]

$$dQ = cm dT \quad \text{and} \quad dS = \frac{dQ}{T} = cm \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} dS = \int_{T_i}^{T_f} cm \frac{dT}{T} = cm \ln T \Big|_{T_i}^{T_f} = cm \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$\Delta S = (901 \text{ J/kgK})(2 \text{ kg}) \ln \frac{293}{879} = -1802 \ln 3 = -1802 \times 1.099 \text{ J/K} = -1980 \text{ J/K}$$

◆ 엔트로피의 감소

23. 이상 기체의 에너지 분포 함수는

$$n(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

로 주어진다. 여기서 N 은 분자의 개수, T 는 절대 온도이다. 계의 총 내부에너지를 구하시오.

(3점) (참고: $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$)

[풀이]

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon \\ &= \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \frac{3}{4} (kT)^2 \sqrt{\pi kT} = \frac{3}{2} NkT \end{aligned}$$