연습문제

2.1 시간 $t = 0$일 때 $x = 0$에서 정지상태로부터 출발하는 질량 m인 입자에 다음 힘이 작용하는 경우 속도 $\dot{x}$와 위치 x를 시간 t의 함수로 구하라. 여기서 F_0와 c는 양의 상수이다.

(a) $F_x = F_0 + ct$

(b) $F_x = F_0 \sin ct$

(c) $F_x = F_0 e^{ct}$

2.2 $x = 0$에서 정지상태로부터 출발하는 질량 m인 입자에 다음 힘이 작용하는 경우 속도 $\dot{x}$를 변위 x의 함수로 구하라. 여기서 F_0와 c는 양의 상수이다.

(a) $F_x = F_0 + cx$

(b) $F_x = F_0 e^{-cx}$

(c) $F_x = F_0 \cos cx$

2.3 연습문제 2.2에서 주어진 각 힘에 대해서 위치에너지 함수 $V(x)$를 구하라.

2.4 질량 m인 입자가 마찰이 없는 수평면 위에서 $F(x) = -kx$의 힘을 받고 놓여 있다. 처음에 원점 $x = 0$에서 양의 x방향인 오른쪽으로 $T_0 = 1/2\, kA^2$의 운동에너지를 갖도록 밀쳐졌다. 여기서 k와 A는 양의 상수이다. (a) 이 힘에 대한 위치에너지 함수 $V(x)$를 구하라. (b) 입자의 운동에너지와 (c) 전체 에너지를 위치의 함수로 구하라. (d) 운동의 방향이 바뀌는 전향점을 구하라. (e) 위치에너지, 운동에너지, 전체 에너지 함수를 그림으로 그려라.

2.5 위의 문제에서 입자가 최초의 운동에너지 T_0를 갖고 힘은 $F(x) = -kx + kx^3/A^2$의 형태인 상황에서 오른쪽으로 밀쳐졌다. 여기서 k와 A는 양의 상수이다. (a) 이 힘에 대한 위치에너지 함수 $V(x)$를 구하라. (b) 입자의 운동에너지와 (c) 전체 에너지를 위치의 함수로 구하라. (d) 운동의 전향점을 구하고, 이 계의 총 에너지가 만족하는 조건이 전향점에서도 성립됨을 보여라. (e) 위치에너지, 운동에너지 및 전체 에너지 함수를 그림으로 그려라.

2.6 질량 m인 입자가 마찰이 없는 수평면 위에서 속력이 $v(x) = \alpha/x$인 형태로 움직인다. 여기서 x는 원점으로부터의 거리, α는 양의 상수이다. 입자에 작용하는 힘 $F(x)$를 구하라.

2.7 질량 M인 물체에 질량 m인 끈이 매어져 있다. 끈에 힘 $\mathbf{F}$가 작용하여 수평과 θ의 각도를 이루는 마찰 없는 경사면을 따라 물체를 끌어올리고 있다. 끈이 물체에 작용하는 힘을 구하라.

2.8 직선운동에서 입자의 속도가 변위 x에 다음 식과 같이 의존할 때

$$\dot{x} = bx^{-3}$$

이 입자에 작용하는 힘을 x의 함수로 구하라. 여기서 b는 양의 상수이다(힌트: $F = m\ddot{x} = m\dot{x}\, d\dot{x}/dx$).

2.9 야구공(반지름 = 0.0366 m, 질량 = 0.145 kg)이 엠파이어스테이트 빌딩(높이 = 1250 ft) 꼭대기에서

정지상태로부터 낙하했다. (a) 야구공의 초기 위치에너지, (b) 마지막 운동에너지, (c) 공기 저항력을 전체 낙하거리에 따라 적분함으로써 낙하하는 야구공이 소모하는 전체 에너지를 구하라. (c)의 결과를 (a), (b) 결과의 차이와 비교하라(힌트: (c)를 계산할 때 선적분에서 생기는 쌍곡선 함수의 근사값을 택하라).

2.10 나무토막이 비스듬하게 기운 평면을 따라서 초기속도 v_0로 밀쳐 올려졌다. 경사각이 30°, 미끄럼 마찰계수가 $\mu_K = 0.1$이라면 나무토막이 제자리로 돌아올 때까지 걸리는 시간은 얼마인가?

2.11 질량 m인 금속 토막이 수평면을 따라서 미끄러진다. 이 수평면에는 끈끈한 기름이 발라져 있어서 점성 저항이 속도의 $\frac{3}{2}$승에 비례한다.

$$F(v) = -cv^{3/2}$$

$x = 0$에서의 초기속도를 v_0라 하면 금속 토막은 $2mv_0^{1/2}/c$ 이상 진행할 수 없음을 증명하라.

2.12 총알을 수직 상방으로 쏘아 올렸다. 총알에 대한 공기저항이 속력의 제곱에 비례한다고 가정하고 속력은 높이에 따라 다음과 같이 변함을 증명하라.

$$v^2 = Ae^{-2kx} - \frac{g}{k} \qquad \text{(위 방향)}$$

$$v^2 = \frac{g}{k} - Be^{2kx} \qquad \text{(아래 방향)}$$

여기서 A, B는 적분상수, g는 중력가속도, $k = c_2/m$, c_2는 제동계수, m은 총알의 질량이다(주의: x는 수직 상방을 양의 방향으로 택했고, 중력은 일정하다고 가정한다).

2.13 위의 결과를 이용하여 총알이 내려오면서 땅에 닿을 때의 속력은

$$\frac{v_0 v_t}{\left(v_0^2 + v_t^2\right)^{1/2}}$$

임을 증명하라. v_0는 초기속력, v_t는 종단속력이다.

$$v_t = (mg/c_2)^{1/2} = \text{종단속력} = (g/k)^{1/2}$$

(이 결과를 이용하여 공기저항으로 인한 초기 운동에너지의 손실을 구할 수 있다.)

2.14 입자를 끌어당기는 힘이 역제곱 법칙을 따른다.

$$F(x) = -kx^{-2}$$

힘의 중심으로부터 b만큼 떨어진 지점에서 정지상태로부터 어떤 입자가 운동을 시작했다. 이 입자가 원점에 도달하는 시간은 다음과 같음을 증명하라.

$$\pi\left(\frac{mb^3}{8k}\right)^{1/2}$$

2.15 제동력의 선형항과 제곱항을 모두 고려할 때 낙하하는 구형 물체의 종단속력은 다음과 같음을 증명하라.

$$v_t = [(mg/c_2) + (c_1/2c_2)^2]^{1/2} - (c_1/2c_2)$$

2.16 위의 결과를 이용하여 질량이 10^{-7} kg, 지름이 10^{-2} m인 비눗방울의 종단속력을 계산하고 식 (2.4.10)에서 얻은 값과 비교하라.

2.17 입자에 작용하는 힘이 다음과 같이 거리의 함수와 속도의 함수의 곱으로 표현된다고 하자.

$$F(x, v) = f(x)g(v)$$

그러면 운동 미분 방정식은 적분법으로 얻을 수 있음을 증명하라. 만일 힘이 거리의 함수와 시간의 함수의 곱으로 주어졌다면 이번에도 간단히 적분법으로 풀 수 있겠는가? 시간의 함수와 속도의 함수의 곱으로 힘이 주어졌다면 어떠한가?

2.18 질량 m인 입자에 작용하는 힘이 다음과 같다.

$$F = kvx$$

여기서 k는 양의 상수이다. 시간 $t = 0$일 때 입자는 원점을 속력 v_0로 지나간다. 거리 x를 시간 t의 함수로 구하라.

2.19 바다에 정지한 군함에서 초기속력 v_0로 수면을 따라가는 포사체를 수평으로 발사했다. 추진 체계에 이상이 생겨서 제동력 $F(v) = -Ae^{\alpha v}$를 받으며 속력이 줄어든다고 가정하자. (a) 속력 $v(t)$를 시간의 함수로 구하라. (b) 포사체가 정지할 때까지 걸린 시간과 (c) 진행 거리를 계산하라. 여기서 A와 α는 양의 상수이다.

2.20 습한 대기 속에서 낙하하는 물방울이 그 단면적 A에 비례하여 질량이 늘어난다고 하자. 이 물방울은 정지상태에서 낙하하기 시작했으며 최초의 물방울 반지름 R_0는 충분히 작아서 처음에는 저항을 받지 않았다고 가정하자. (a) 물방울의 반지름과 (b) 속력은 시간에 비례하여 선형으로 증가함을 증명하라.

컴퓨터 응용 문제

C2.1 지표면으로부터 고도가 32 km인 비행기에서 질량 70 kg인 낙하산병이 뛰어내렸는데 불행하게도 낙하산이 펴지지 않았다(이 계산에서 수평운동은 무시하고 초기속도는 영이라고 가정하자).

(a) 공기저항이 없고 중력가속도 g가 일정하다고 가정할 때 지표면에 떨어질 때까지의 낙하 시간을