

다음 문제들을 숙지하세요. 이 중 서너 개와 유사한 문제를 제출하겠습니다.

1. (20 점) 비호공업사는 두 가지 제품 X와 Y를 생산하여 판매하고 있다. 각 제품단위당 판매이익은 각각 5만원, 2만원이다. 한편 비호공업사가 X, Y 각 제품을 생산하기 위해서는 A, B, C 공정을 거쳐야 한다. 제품 X를 한 개 생산하려면 A 공정에서 1시간, C 공정에서 4시간 작업이 필요하며, 제품 Y를 한 개 생산하려면 A 공정에서 3시간, B 공정에서 2시간의 작업을 필요로 한다. 각 공정의 최대가능조업시간은 A 공정이 27시간, B 공정이 14시간, C 공정이 36시간이다. 비호공업사의 목적은 각 공정의 최대가능조업시간을 넘지 않으면서 이익을 최대화하는 것이다. 다음 절차에 따라 이 문제의 수리모형을 수립하라.

풀이]

- a) (5 점) 의사결정변수를 정의하라.

x = 제품 X 생산량 (개)

y = 제품 Y 생산량 (개)

- b) (5 점) 목적함수를 정의하라

Maximize $5x + 2y$ (만원)

- c) (10 점) 제약식을 써라.

s.t.:

공정 A: $1x + 3y \leq 27$ (시간)

공정 B: $2y \leq 14$ (시간)

공정 C: $4x \leq 36$ (시간)

비음 조건 $x, y \geq 0$

건

2. (10점) 당신은 가구공장 공장장이다. 네 모델의 책상을 생산하려고 한다. 모델 A, B, C, D라고 부르자. 책상을 만들려면 목재를 절단하여 부품들을 만들고 이들을 조립하고 칠을 해야 한다. 모델 D는 C와 동일한데 칠을 하지 않은 것이다. 이 책상들은 인기가 좋아서 만들면 모두 팔린다. 각 모델의 1개당 이익과 각 작업에 소요되는 시간(단위는 시간)은 다음 표와 같다.

모델	절단(Cutting)	조립(Assembling)	칠하기(Painting)	이익(만원)
A	3	4	5	15
B	1	2	5	10
C	4	5	4	40
D	4	5	0	20
가용시간	150	200	300	

한편 각 작업을 에 투입할 수 있는 가용시간은 절단에 150시간, 조립에 200시간 칠하기에 300시간이다. 각 모델을 몇 개씩 만들면 가장 이익을 많이 낼 수 있을까? 이 문제를 풀기 위한 수리모형을 작성하라.

풀이)

Dec. Var. (4점)

A = 모델 A 생산량; B = 모델 B 생산량; C = 모델 C 생산량; D = 모델 D 생산량;

(2점) Max. $15A + 10B + 40C + 20D$ (만원)

s.t.:

(1점) $3A + 1B + 4C + 4D \leq 150$ (시간)

(1점) $4A + 2B + 5C + 5D \leq 200$ (시간)

(1점) $5A + 5B + 4C \leq 300$ (시간)

(1점) A, B, C, D ≥ 0

(원), (시간) 완벽하게 붙이지 않으면 -1점

3. (10점) 건공사료공업사는 애완견용 사료를 생산한다. 사료는 세 가지 기초 배합사료 A, B, C를 혼합하여 만든다. 각 기초배합사료의 가격(원/Kg)과 성분 함유율(%)은 다음과 같다.

기초배합사료	가격(원/Kg)	단백질(%)	탄수화물(%)	지방(%)
A	990	62	5	3
B	840	55	10	2
C	600	36	20	1

이 표를 좀 더 설명하면, 1Kg의 기초배합사료 A에는 단백질이 62%, 즉 620g, 탄수화물은 50g, 지방은 30g이 함유되어 있다. 개 한 마리가 하루에 최소한 단백질 220g, 탄수화물 28g을 섭취하고 지방은 14g 이하 섭취하도록 사료를 만들고 싶다. 그러면 최소비용으로 1일분 애완견용 사료를 만들려면 각 기초배합사료를 얼마만큼씩 넣어서 혼합하여야 하는가? 이 문제를 풀기 위한 수리모형을 작성하라.

- (4 점) Dec. Vars. A=기초배합사료 A의 양(Kg);
 B=기초배합사료 B의 양(Kg);
 C=기초배합사료 C의 양(Kg);

(2 점) Min. $990A + 840B + 600C$ (원)

s.t.

(1 점) $620A + 550B + 360C \geq 220$ (g)

(1 점) $50A + 100B + 200C \geq 28$ (g)

(1 점) $30A + 20B + 10C \leq 14$ (g)

(1 점) A, B, C ≥ 0

(원) (g) 완벽하게 붙이지 않으면 -1 점

4. (30점) 하양공업은 세가지 제품(A, B, C)을 생산한다. 제품 A를 3,000개, 제품 B를 2,000개, 제품 C를 900개 주문 받았는데 1개월 후에 납품해야 한다. 각 제품은 두 가지 공정을 거쳐서 생산되는데 각 제품의 각 공정별 소요시간과 앞으로 1개월 간 각 공정에서 가용한 시간은 다음과 같다.

	제품 A	제품 B	제품 C	가용시간(시간)
공정 1	2	1.5	3	10,000
공정 2	1	2	1	5,000

보다시피 모든 주문을 생산할 만큼 공정의 가용시간이 충분하지 않다. 그래서 일부는 이웃의 다른 회사에 하청을 주어 생산해야 한다. 그런데 제품 A, B, C 를 직접 생산하려면 1 개당 각각 50,000 원, 83,000 원, 130,000 원 드는데 비해 하청 생산하면 이보다 비싸게 각각 61,000 원, 97,000 원, 145,000 원씩 지불해야 한다. 가장 비용을 적게 들이면서 주문 받은 물량을 모두 납품하려면 어떻게 생산하여야 할까? 선형계획법을 사용하여 이 문제를 풀어라.

- a) (5 점) 의사결정변수를 정의하라. (단위까지 명확하게 표현하라.)

X_A, X_B, X_C : 하양공업 내부에서 생산할 제품 A, B, C 의 양(개)

Y_A, Y_B, Y_C : 하청으로 생산할 제품 A, B, C 의 양(개)

- b) (5 점) 목적함수를 정의하라.

$$\text{Min } 50,000X_A + 83,000X_B + 130,000X_C + 61,000Y_A + 97,000Y_B + 145,000Y_C$$

- c) (5 점) 제약식을 써라. (반드시 수식은 아니더라도 필요한 제약식을 모두 파악하였음을 보일 정도는 되어야 함.)

(공정 1 시간) $2X_a + 1.5X_b + 3X_c \leq 10,000$

(공정 2 시간) $1X_a + 2X_b + 1X_c \leq 5,000$

$X_a + Y_a = 3,000$

$X_b + Y_b = 2,000$

$X_c + Y_c = 900$

5. (15점) 비호전기(주)는 가전제품용 전기모터(Electric Motor)를 세 곳의 공장, A, B, C에서 만들어 전자제품회사 4 곳에 납품한다. 다음달 이들 고객의 수요는 오른쪽 표와 같다.

전자제품회사	1	2	3	4
수요	300	500	400	600

이 회사의 세 공장 A, B, C의 창고에는 이 전기모터가 각각 800개, 600개, 700개 있다. 각 공장에서 전자회사들에게 전기모터를 1개 보내는 데 드는 비용(단위: 천원)은 오른쪽 표와 같다.

	전자제품회사				
	1	2	3	4	재고
공장 A	3	2	5	7	800
공장 B	6	4	8	3	600
공장 C	9	1	5	4	700
수요	300	500	400	600	

최소비용으로 전자제품회사의 수요를 충족하기 위한 운송계획의 수리모형을 작성하라.

[풀이]

(3 점) Dec. Vars. x_{ij} = 공장 i 에서 전자제품회사 j 로 보낼 량(개); $i=A,B,C; j=1,2,3,4$

c_{ij} = 공장 i 에서 전자제품회사 j 로 한 대 보내는 데 드는 비용(천원/개);

$i=A,B,C; j=1,2,3,4$

d_j = 전자제품회사 j 의 수요 (개), $j=1,2,3,4$

I_i = 공장 i 의 재고 (개), $i=A, B, C$

비용(c), 수요(d), 재고(I)를 Parameter 로 표현한 경우 (+3 점)

(기본점수 +1 점)

(3 점) $\text{Min} \sum_{i=A}^C \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij}$ (천원)

(3 점) s. t.: $\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq I_i, i = A, B, C$ (공급능력 또는 재고)

(4 점) $\sum_{i=A}^C x_{ij} \geq (\text{또는 } =) d_j, j = 1,2,3,4$ (수요 충족)

(1 점) $x_{ij} \geq 0; i=A,B,C; j=1,2,3,4$

6. (15 점) 하양대학교 수영부 코치 김수영씨는 전국 대학생 수영 대회에서 계영(relay)의 각 종목별 선수를 정하려고 한다. 계영은 네 가지 수영 종목(접영, 평영, 배영, 자유형)을 네 명의 선수가 각 한 종목씩 맡아서 연속으로 이어서 진행되는 종목이다. 현재 출전한 선수는 김, 정, 오, 구 등 4 명이고 이들의 각 종목별 최근 기록(초)은 다음과 표와 같다.

선수	종목			
	접영	평영	배영	자유형
김	38	75	44	27
정	34	76	43	25
오	41	71	41	26
구	33	80	45	30

최근 기록을 기준으로 할 때 계영의 기록을 최고를 좋게 하려면 각 종목을 어느 선수에게 맡기는 것이 좋을까? 이를 위한 수리모형을 작성하라.

D.V.:

- (3 점) $x_{ij} = 1$, 선수 i 가 종목 j 에 배정; 0, otherwise;

$i=1$ (김), 2 (정), 3 (오), 4 (구); $j=1$ (접영), 2 (평영), 3 (배영), 4 (자유형)

참고: 편의상 c_{ij} = 선수 i 의 종목 j 기록으로 정의하자. (예, $c_{김접}$ = 38 초, $c_{구자}$ = 30 초)

- (4 점) Min 계주시간 = $\sum_{i=김}^7 \sum_{j=접}^4 c_{ij}x_{ij}$

$$38x_{11} + 75x_{12} + 44x_{13} + 27x_{14} + 34x_{21} + 76x_{22} + 43x_{23} + 25x_{24} + 41x_{31} + 71x_{32} + 41x_{33} + 26x_{34} + 33x_{41} + 80x_{42} + 45x_{43} + 30x_{44}$$

제약 조건:

- (4 점) $\sum_{j=접}^4 x_{ij} = 1, i=김...구$. (각 선수는 반드시 한 종목에 배정된다.)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \quad (\text{김 선수})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \quad (\text{정 선수})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \quad (\text{오 선수})$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \quad (\text{구 선수})$$

- (4 점) $\sum_{i=김}^7 x_{ij} = 1, j=접...자$. (각 종목은 반드시 한 선수에 배정된다.)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \quad (\text{접영})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \quad (\text{평영})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \quad (\text{배영})$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \quad (\text{자유형})$$

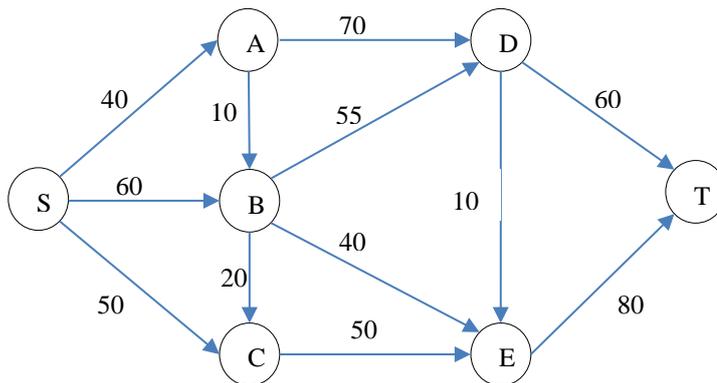
$$x_{ij} \geq 0$$

7. (20점) 당신은 직접 차를 운전하여 한번도 가본 적이 없는 도시에 가려고 한다. 최단거리로 가려고 지도를 펴 놓고 어떤 길을 거쳐서 가야 할지 생각 중이다. 선택하는 경로에 따라서 가는 중에 거쳐야 할 다섯 도시(A, B, C, D, E)가 있다. 지도에는 인접한 두 도시를 직접 연결하는 도로의 거리가 표시되어 있다. 오른쪽 표는 이 정보를 정리한 것이다. ‘—’ 표시는 두 도시를 바로 연결하는 도로가 없음을 의미한다. 예를 들어, 출발지에서는 도시 A, B, C로 직접 연결된 도로가 있고 거리는 각각 40km, 60km, 50km이다. 도시 A에서는 두 도시 B와 D로 직접 연결된 도로가 있다.

	도시 간의 거리(Km)					목적지
	A	B	C	D	E	
출발지	40	60	50	—	—	—
A	—	10	—	70	—	—
B	—	—	20	55	40	—
C	—	—	—	—	50	—
D	—	—	—	—	10	60
E	—	—	—	—	—	80

마디는 도시를, 가지는 도로를 나타내는 네트워크를 그려서 각 가지에 해당하는 거리를 표시하고 출발지에서 목적지까지 가는 최단 경로를 찾는 수리모형을 작성하라.

(10 점)



x_i = 가지 i 의 흐름량; $i \in \{SA, SB, SC, AB, AD, BC, BD, BE, CE, DE, DT, ET\}$

c_i = 가지 i 의 거리 (km)

$$\min \sum_i c_i x_i$$

$$= 40x_{SA} + 60x_{SB} + 50x_{SC} + 10x_{AB} + 70x_{AD} + 20x_{BC} + 55x_{BD} + 40x_{BE} + 50x_{CE} + 10x_{DE} + 60x_{DT} + 80x_{ET}$$

$$S: x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} = +1$$

$$A: x_{AB} + x_{AD} - x_{SA} = 0$$

$$B: x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} - x_{SB} - x_{AB} = 0$$

$$C: x_{CE} - x_{SC} - x_{BC} = 0$$

$$D: x_{DE} + x_{DT} - x_{AD} - x_{BD} = 0$$

$$E: x_{ET} - x_{BE} - x_{CE} - x_{DE} = 0$$

$$T: -x_{DT} - x_{ET} = -1$$

